TMV141

# SKALÄR PRODUKT och ORTONORMERADE BASER

L16

$u$ och $v$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, $u$ och $v$ är $n\times 1$ matriser.

$u^T$ är $1\times n$ matris, och produkt $u^T\cdot v$ är $1\times 1$ matris = skalär.

$u^T\cdot v$ är SKALÄR PRODUKT av $u$ och $v$ och vi kan skriva också $u\cdot v$.

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$$ skalärprodukt av $u$ och $v$ är

$$[u_1\ u_2\ \dots\ u_n]\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+\dots u_nv_n$$

<u>Ex</u> $u=\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}$ $v=\begin{bmatrix}3\\2\\-3\end{bmatrix}$ $u\cdot v=?$ $v\cdot u=?$

$$u\cdot v=u^T\cdot v=[2\ -5\ -1]\begin{bmatrix}3\\2\\-3\end{bmatrix}=2\cdot 3+(-5)(2)+(-1)\cdot(-3)=-1$$

$$v\cdot u=v^T\cdot u=[3\ 2\ -3]\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}=3\cdot 2+2\cdot(-5)+(-3)(-1)=-1$$

<u>Sats 6.1.1</u> Låt $u, v, w$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ och $c$ är skalär. Då gäller:

(1) $u\cdot v=v\cdot u$

(2) $(u+v)w=uw+vw$

(3) $(cu)v=c(u\cdot v)=u(c\cdot v)$

$\Big\}$ $(c_1u_1+\dots+c_pu_p)w=c_1(u_1w)+\dots+c_p(u_p\cdot w)$

(4) $u\cdot u\geq 0$ och $u\cdot u=0$ omm $u=0$

## NORM och AVSTÅND

Norm (längd) av en vektor $v$ är skalären $\|v\|$ som definieras av: $\|v\|=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}$, $\|v\|^2=v\cdot v$

En ENHETSVEKTOR eller NORMERAD vektor är en vektor $u$ sådan att $\|u\|=1$

Som en följd av detta kan vi definiera AVSTÅNDET $\text{dist}(u,v)$ mellan två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ som normen av skillnaden mellan dessa, dvs.:

$$\text{dist}(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \ldots + (u_n-v_n)^2}$$

Det gäller att $\|cu\| = |c|\,\|u\|$

$$\|c\cdot u\|^2 = (cu)^T(cu) = c^2(u^Tu) = c^2\|u\|^2$$

Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ORTOGONALA om $u \circ v = 0$

# Begreppet ortogonalitet är en generalisering av vinkelräthet.
Vi kan definiera vinklar i $\mathbb{R}^n$ genom formeln:

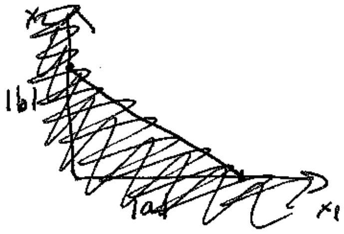
$$u \circ v = \|u\|\,\|v\| \cdot \cos(\alpha) \quad , \alpha \in [0, \pi] \text{ är vinkeln mellan } u \text{ och } v$$

om vektorerna är ortogonala $\alpha = 90° \; (\pi/2) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u \cdot v = 0$ //

<u>PYTHAGORAS SATS</u>: Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}$ är ortogonala o.m.m.

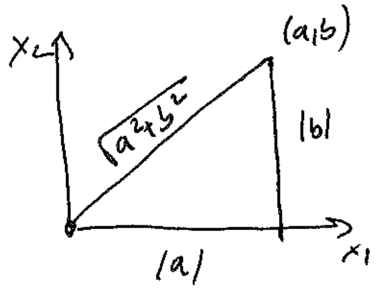
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

<u>Bevis</u> $\|u+v\|^2 = (u+v)(u+v) = u \circ u + 2u \circ v + v \circ v$
$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \circ v$




$u$ och $v$ är ortogonala $\Rightarrow u \circ v = 0 = 2u \circ v = 0$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$




$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

<u>Ex</u> $\text{dist}(u,v) = ?$ $\quad u = (7,1)$, $v = (3,2)$

$$u - v = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dist}(u-v) = \|u-v\| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$$

# ORTOGONALA KOMPLEMENT

<u>Def</u> (Ortogonalt komplement)
Låt $W$ vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Då betecknar vi med $W^{\perp}$ det <u>ortogonala komplementet</u> till $W$, dvs. mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i $W$ dvs.

$$W^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0 \text{ för alla } w \in W\}$$

<u>Viktig</u>: a) $x \in W^{\perp}$ omm $x$ är ortogonala mot alla vektorer i mängden som spänner upp $W$

b) $W^{\perp}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

c) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

<u>Sats 6.1.3</u> Låt $A$ vara en $m \times n$ matris. Då gäller:

$$\begin{cases} (\mathrm{Row}\,(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A) \\ (\mathrm{Col}\,(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T) \end{cases}$$

Bra att veta: $\dim W + \dim W^{\perp} = m$
$\left(= \dim \mathrm{Col}(A) + \dim \mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{rank}(A^T) + \dim \mathrm{Nul}(A^T)\right)$

## ORTOGONAL MÄNGD

<u>Def</u> En ~~mägd~~ mängd $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ORTOGONAL MÄNGD om $u_i \cdot u_j = 0$ för alla $i \neq j$.

<u>Sats 6.2.4</u> Varje ortogonal mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte innehåller nollvektorn är linjärt oberoende.

## ORTOGONALA BASER

<u>Def.</u> En ortogonal bas $\mathcal{B}$ för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd.

<u>Sats 6.2.5</u> Om $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ är en ortogonal bas för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ så gäller att varje vektor $y \in W$ kan skrivas som:

$$y = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p \quad \text{där} \quad c_j = \frac{y \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$$

$$(\text{om } \|u_j\| = 1 \Rightarrow c_j = y \cdot u_j)$$

<u>Ex</u> Beskriva vektor $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ som linjär kombination av vektorer

i $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$

$y u_1 = 11 \qquad y u_2 = -12 \qquad y u_3 = -33$

$u_1 u_1 = 11 \qquad u_2 u_2 = 6 \qquad u_3 u_3 = 33/2$

$$y = \overset{c_1}{\frac{y u_1}{u_1 u_1}} \cdot u_1 + \frac{y u_2}{u_2 u_2} u_2 + \frac{y u_3}{u_3 u_3} u_3$$

$$= \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 + \frac{-33}{33/2} u_3$$

$$= \underline{u_1 - 2u_2 - 2u_3}$$

## <u>ORTONORMALA MÄNGDER och BASER</u>

En enhetsvektor $u$ är en vektor med längden 1, dvs $\|u\| = 1$. En ORTONORMAL MÄNGD (ON-mängd) är en ortogonal mängd där alla element är enhetsvektorer.

En ORTONORMAL BAS (ON-bas) för ett underrum $W \in \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ~~ortonormal~~ ON mängd. En ON-bas är alltså en ortogonal bas.

<u>Ex</u> Visa att $\{v_1, v_2, v_3\}$ är ON-bas av $\mathbb{R}^3$. $v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= -3/\sqrt{66} + 2\sqrt{66} + 1/\sqrt{66} = 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= -3/\sqrt{726} - 4/\sqrt{726} + 7/\sqrt{726} = 0 \\ v_2\, v_3 &= 1/\sqrt{396} - 8/\sqrt{396} + 7/\sqrt{396} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ är ortogonal mängd (1)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 u_1 &= 9/11 + 1/11 + 1/11 = 1 \\ u_2 u_2 &= 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1 \\ u_3 u_3 &= 1/66 + 16/66 + 49/66 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \text{ är enhetsvektorer } (2)$$

(1) och (2) $\Rightarrow$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ är ON-bildugd. $\Rightarrow$ är linjär oberoende $\Rightarrow$
$\{u_1, u_2, u_3\}$ form bas i $\mathbb{R}^3$.

<u>Sats 6.2.6</u> Låt $U$ vara $m \times n$ matris, då är $U^T U = I_n$ omm $U$:s kolonner är ortonormala.

<u>Sats 6.2.7</u> Om $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har ortonormala kolonner, och $x, y \in \mathbb{R}^n$ så gäller att:

a) $\|Ux\| = \|x\|$

b) $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$

c) $(Ux)(Uy) = 0$ omm $xy = 0$