TMV 141

L1

Ekvationssystem, Matriser och Eliminationsmetoden

Betrakta ekvationsystemen:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

2 ekvationer med 2 okända variabler

b) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$

3 ekv. med 3 okända variabler

Vi ser att i båda dessa system så är antalet variabler lika med antalet ekvationer.

Ekvation $Ax + By + Cz = D$ betyder ett plan i rummet $\mathbb{R}^3$ och $ax + by = c$ eller $y = kx + m$ betyder en linje i planet $\mathbb{R}^2$.

Flera sådana ekvationer kan bilda ett system av ekvationer, ETT EKVATIONSSYSTEM, och en lösning till ett sådant ekvations system är alltså punkter som ligger på alla planen (eller linjerna) i systemet.

Mer generellt:

Låt m och n vara två positiva heltal. Det allmänna ekvations-systemet är:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} - $1 \leq i \leq m$ och $1 \leq j \leq n$ (dekända eller givna) koefficienterna

m - antalet ekvationer

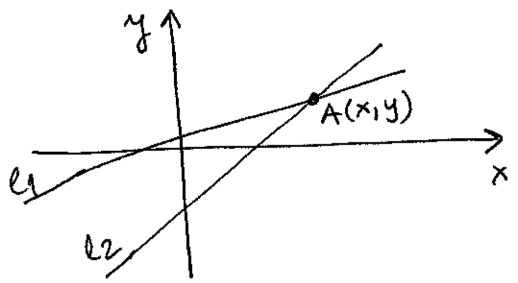
n - antalet variabler (elle så kallade okända)

Att lösa ekv. systemet innebär att finna alla de möjliga, om några, värdena på de okända variablerna x_j, $1 \leq j \leq n$.

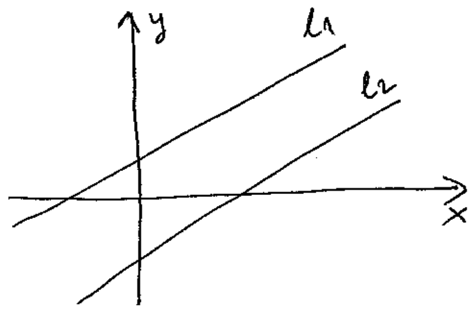
Om
- $m = n$ kallas ekv. systemet KVADRATISKT
- $m < n$ kallas ekv. systemet UNDERBESTÄMT
- $m > n$ kallas ekv. systemet ÖVERBESTÄMT

En lösning till ekv.-systemet (1) är en punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller alla m ekvationerna.

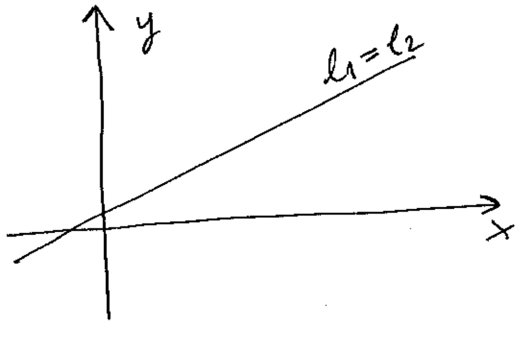
Genom att betrakta ekv.systeme bestående av två linjer i $\mathbb{R}^2$, ser vi att för lösningar är bara tre olika fall möjliga:

1) 

$l_1 \cap l_2 = A(x,y)$ punkt $\Rightarrow$ exakt en lösning

2) 

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ ingen lösning

3) 

$l_1 = l_2 \Rightarrow$ oändligt många lösningar

Sats 1 Ett allmänt ekv. systemet har precis en lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar.

Hur löser vi ett ekvationssystem?

Eliminationsmetoden

Eliminationsmetoden är den fundamentala metoden och grunden för ett systematisk, automatiskt lösande som lämpar sig väl för använda i beräkning med datorer.

Strategi: Göra enkla operationer (s.k. RADOPERATIONER) och få ett nytt enklare ekv. system med samma lösningar.

Definition (ELEMENTÄRA RADOPERATIONER)

1) Byte av plats för ekvationer, rader
2) Multiplikation av en ekv., rad med en konstant $\neq 0$
3) Muliplikation av en ekv., rad med en konstant, läggs till en annan ekv., rad

Ex 1

1) Lösningar till $\begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

2) Lösningar till $2x+2y=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x+2y=4) \Leftrightarrow x+y=2$

3) Lösningar till $\begin{cases} x+y=1 \quad \boxed{1} \\ -x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2y=3 \end{cases}$

Ex 2 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=6 \\ x+2y=3 \quad (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=6 \\ -4x-8y=-12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad -3y=-6 \quad$ och $\quad x=3-2y$

$\boxed{y=2} \qquad \boxed{x=-1}$

Lösning är en punkt $A(-1,2)$ i $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ exakt en lösning

Sats 2 Elementära radoperationer på ett ekv.systemet förändrar ej lösningsmängden.

Grundfrågor:

1) Finns det någon lösning dvs. EXISTENTS av lösning till ekv.systemet

2) Om det finns en lösning till ekv.systemet, är den då unik (eller entydig, dvs. enda lösningen) eller finns det flera lösningar

Strategi för ett lösa ett ekv. systemet

Matrisnotation undertrycker variabelnamnen och skapar på ett entydigt vis ett tillhörande talschema; en s.k. MATRIS.

Ex3 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$

Allmänna ekv. systemet (1):

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

(a_{ij} KOEFFICIENTmatris) → HÖGERLEDSMATRIS (HL) eller (b_i)

TOTALMATRIS ($a_{ij}|b_i$) (eng. AUGMENTED matrix)

Strategi: Överföra totalmatrisen med hjälp av (m.h.a) elementära radoperationer i en triangulär form.

Def: I en matrisrad kallas det första NOLLSKILDA talet i raden, för ett LEDANDE ELEMENT.

Def (Trappstegsform eller triangulär form elle rad echalon form (REF))

En rektangulär totalmatris är i TRAPPSTEGSFORM om:

1) alla icke-nollrader är ovanför alla nollrader
2) varje ledande tal i en rad är strikt till höger om det ledande talet i raden före
3) alla tal i en kolonn under ett ledande tal är noll

Matrisen är i REDUCERAD TRAPPSTEGFORM (RREF) om också:
(eng. reduced row echalon form)

4) det ledande talet i varje nollskild rad är $=1$
5) varje ledande etta är det enda nollskilda talet i kolumnen.

Ex 4 REF $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$ RREF $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Def: Ett ledande tal i en trappstegsformad (REF) matris kallas PIVOTELEMENT. Pivotelement är alltid $\neq 0$.

Ett ekv.systemet där högerledet, HL, är 0 kallas ett HOMOGENT ekv.systemet; annars INHOMOGENT.

Ett homogent ekv.systemet alltid har en lösning (åtminstone; möjligen fler), nämligen lösningen $(x_1, x_2, .., x_n) = (0, 0, .., 0)$.

Def: Variabler som hör ihop med kolonner med pivotelement kallas BUNDNA; och de som hör ihop med kolonner utan pivotel. kallas FRIA variabler (elle parameter).

Den bundna variablerna kan uttryckas med (enbart) de fria variablerna.

Ex 5

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

x_1, x_2 – bundna (pivotel.)

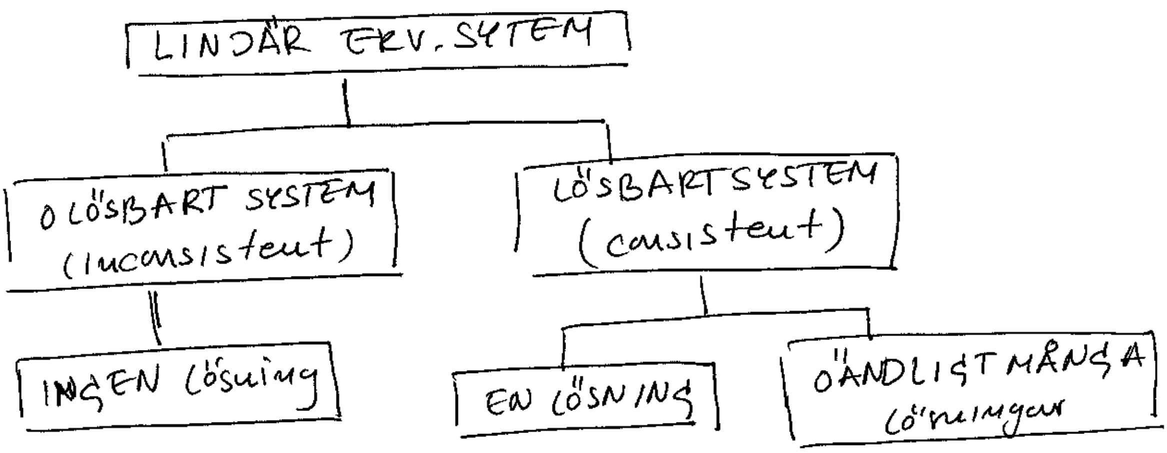
x_3 – fria variabel

SAMMANFATTNING

1) Om ett pivotelement finns i HL (alltså till höger om det vertikala strecket) så finns ingen lösning.

2) Om varje kolonn i koefficientmatris har ett pivotelement och ingen i HL, så finns inga fria variabler och alltså en UNIK lösning.

3) Om någon kolonn i koefficientmatrisen saknar pivotelement så finns frivariabel och alltså oändligt många lösningar. Det finns då lika många parameter (fria variabler elle frihetsgrader) som kolonner som saknar pivotelement.



Ex6

$$\begin{cases} 6x + 5y + 1\cdot z = 45 \\ 5x + 2y - 1z = 23 \\ 13x - 7y + 1z = 6 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 45 \\ 5 & 2 & -1 & 23 \\ 13 & -7 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad -2 \quad -1$$

$R_3 = -2R_1 + R_3$
$R_2 = -R_1 + R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 & 45 \\ -1 & -3 & -2 & -22 \\ 1 & -17 & -1 & -84 \end{array}\right) \quad 1 \quad 6 \quad -1$$

$R_1 = 6R_2 + R_1$
$R_2 = -1\cdot R_2$
$R_3 = R_2 + R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -13 & -11 & -87 \\ 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -20 & -3 & -106 \end{array}\right)$$

$R_2 \Leftrightarrow R_1$
$R_1 = -R_1$
$R_3 = -R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 13 & 11 & 87 \\ 0 & 20 & 3 & 106 \end{array}\right) \quad -1$$

$R_3 = -R_2 + R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 13 & 11 & 87 \\ 0 & 7 & -8 & 19 \end{array}\right) \quad -2$$

$R_2 = -2\cdot R_3 + R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & 27 & 49 \\ 0 & 7 & -8 & 19 \end{array}\right) \quad 7$$

$R_3 = 7R_2 + R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & 27 & 49 \\ 0 & 0 & 181 & 362 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} -1 \\ 1/181 \end{matrix}$$

$R_2 = -R_2$
$R_3 = \frac{R_3}{181}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 1 & -27 & -49 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad 27 \quad -2$$

$R_1 = -2R_3 + R_1$
$R_2 = 27R_3 + R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad -3$$

$R_1 = -3R_2 + R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$