TMV141, Föreläsning 11

- Baser & koordinater
- Basbyte

A Repetition:

<u>Def</u>: (Bas) Låt V vara ett vektorrum.
En bas för V är en delmängd
$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\} \subset V$ sådant att:

1) $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende
(dvs $b_1, \ldots, b_p$ är linjärt oberoende)

2) $\operatorname{span} \mathcal{B} = V$ #

<u>Def</u>. (Radrum) Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Definiera

$\operatorname{Row} A = \operatorname{span}\{a_j : a_j \text{ är radvektor i } A\}$,

As radrum. (Obs: $\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^T$) #

<u>Sats</u> (4.6.13) Om $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ är radekvivalenta, så gäller $\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} B$.

<u>OBS</u>: Om B är en trappstegsform av A så bildar alla icke-nollrader av B en bas för $\operatorname{Row} B = \operatorname{Row} A$.
Samtidigt, så finns det exakt så många kolonner med pivotelement som det finns icke-nollrader i en trappstegsform av A.

Det följer att $\dim(\operatorname{Row} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$.
Det är inte självklart då $\operatorname{Row} A \subset \mathbb{R}^n$
och $\operatorname{Col} A \subset \mathbb{R}^m$
där $m \neq n$ är möjligt.

<u>Def</u> (Rang) $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Row} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$ #

<u>Sats</u> (Dimensionssatsen, 4.6.14) Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Då gäller $\operatorname{rank} A + \dim(\operatorname{Nul} A) = n$

<u>Sats</u> (Om inverterbara matriser (forts.)) Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Följande är ekv. (Se #L6 för ytterligare påståenden)

1.) A är inverterbar

13) As kolonner bildar en bas för $\mathbb{R}^n$.

14) $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$

15) $\dim(\operatorname{Col} A) = n$

16) $\operatorname{rank} A = n$

17) $\operatorname{Nul} A = \{0\}$

18) $\dim(\operatorname{Nul} A) = 0$

19) $\det(A) \neq 0$.

[2]

B Baser och koordinater

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ vara en bas för V.

Villkoret 2) i basens definition medför att $v \in V$ kan skrivas som $v = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$ för några $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$.

Def. $c_1, \dots, c_p$ är v:s koordinater relativt $\mathcal{B}$. [$\mathcal{B}$-koordinater] #

Sats (Koordinaternas entydighet) Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ vara en bas för V. För varje $v \in V$ finns entydigt bestämda koordinater $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$, sådant att

$$v = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p.$$

Def: Om $c_1, \dots, c_p$ är $\mathcal{B}$-koordinater för $v \in V$ så är $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ v:s koordinatvektor relativt $\mathcal{B}$ eller $\mathcal{B}$-koordinatvektor. #

C Basbyte

Def (Standardbas) Låt $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. (rad: i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ är den såkallade standardbasen för $\mathbb{R}^n$. #

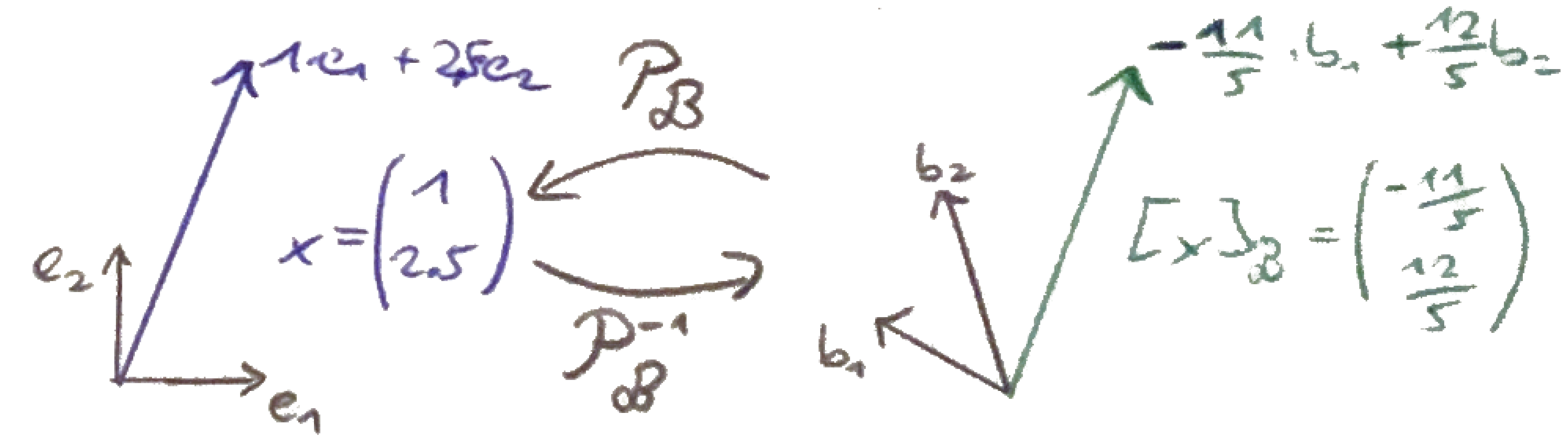
Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$ och sätt $P_{\mathcal{B}} = (b_1 \dots b_n)$. Om $x \in \mathbb{R}^n$ med $\mathcal{B}$-koordinater $c_1, \dots, c_n$ så är $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = P_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}$.

Obs: Om $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ så gäller

$$\underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n}_{\text{koordinater: standardbasen } \{e_1, \dots, e_n\}} = x = \underbrace{c_1 b_1 + \dots + c_n b_n}_{\text{koordinater, bas } \mathcal{B}}.$$

Def. $P_{\mathcal{B}}$ är basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen. ($[x]_{\mathcal{B}} \xrightarrow{P_{\mathcal{B}}} x$). Notera att $P_{\mathcal{B}}^{-1}$ existerar ty $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende. Då är $P_{\mathcal{B}}^{-1} x = [x]_{\mathcal{B}}$ och $P_{\mathcal{B}}^{-1}$ är basbytesmatrisen från standardbasen till $\mathcal{B}$. #

Notera: $x \in \mathbb{R}^n$ förändras inte. Basbyte ändrar endast koordinatrepresentationen.



Det går även att byta mellan två valfria baser.

Sats (Allmänt basbyte, 4.7.15)

Låt $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ och $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara baser för ett vektorrum V. Det existerar en unik matris $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att

$$[x]_\mathcal{B} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}\,[x]_\mathcal{A}.$$

$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}$ är basbytesmatrisen från $\mathcal{A}$ till $\mathcal{B}$ och det gäller att $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P} = ([a_1]_\mathcal{B}, [a_2]_\mathcal{B}, \dots, [a_n]_\mathcal{B})$.

Notera att $\left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}\right)^{-1} = \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

riktningsbyte

Alternativt kan $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}$ bestämmas med hjälp av radoperationer:

Om $V = \mathbb{R}^n$ så gäller

$$(a_1 \dots a_n \mid b_1 \dots b_n) \sim (I \mid \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P})$$

och $$(b_1 \dots b_n \mid a_1 \dots a_n) \sim (I \mid \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P})$$

Ex: Låt $a_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix}-1\\9\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$

$\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ och $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ är baser för $\mathbb{R}^2$, ty de är linjärt oberoende.

Bestäm $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}$ och $\underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

Radreducera till vänster del är lika med $I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$:

$$(a_1\ a_2 \mid b_1\ b_2) = \left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&-5\\-1&4&9&7\end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&-5\\0&-2&-12&-8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&5&3\\0&1&6&4\end{array}\right)$$

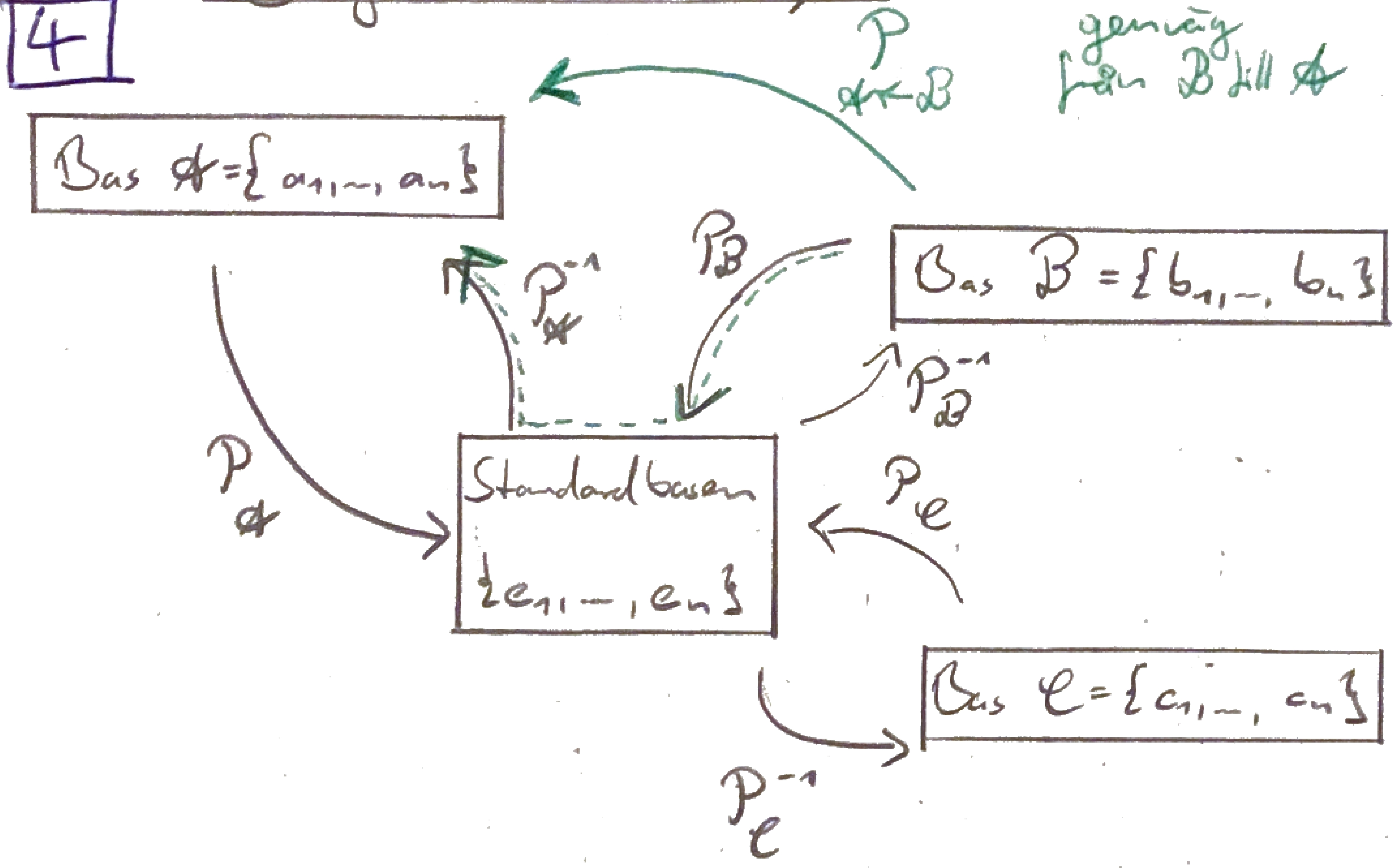
$$\Rightarrow \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix}5&3\\6&4\end{pmatrix}$$

$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P}$ kan bestämmas som

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P} = \left(\underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}5&3\\6&4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\cdot4-3\cdot6}\begin{pmatrix}4&-3\\-6&5\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}2&-3/2\\-3&5/2\end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$

Diagram om basbyte



$$[x]_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A}}^{-1}P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

läs höger till vänster

och därför

definition $P_{\mathcal{B}}$

koordinatvektorer i standardbasen

$$P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A}}^{-1}P_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A}}^{-1}(b_1, \dots, b_n) =$$

$$= (P_{\mathcal{A}}^{-1}b_1, \dots, P_{\mathcal{A}}^{-1}b_n) =$$

$$= ([b_1]_{\mathcal{A}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{A}})$$