TMV141 DIAGONALISERING

L13

Två matriser A och B sägs vara SIMILÄRT ekvivalenta om
(eng. SIMILAR)

det finns en ~~ener~~ INVERTERBAR matris P så att $P^{-1}AP=B$

(då är $A = PBP^{-1}$)

<u>Def</u> (DIAGONALISERBAR MATRIS)

Låt A vara en <u>kvadratisk matris</u> $(n \times n)$. Matrisen A är DIAGONALISERBAR om det finns en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att:

$$D = P^{-1}AP$$

Med "att diagonalisera en matris (om möjligt)" menar vi att skriva, om möjligt, matrisen A på formen:

$$A = PDP^{-1}, \text{ där } D \text{ är en diagonalmatris.}$$

Sats (5.3.5) (Diagonalisering av en kvadratisk matris)

Låt A vara en $n \times n$-matris. Matrisen är DIAGONALISERBAR o.m.m. matrisen har <u>n linjärt oberoende egenvektorer.</u>

Eftersom n-st linjär oberoende vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^n$ kan vi uttrycka sats 5.3.5 på följande sätt.

Låt A vara en $n \times n$-matris. Matrisen A är DIAGONALISERBAR o.m.m. $\mathbb{R}^n$ har en bas av MATRISENS EGENVEKTORER.

Om $A = PDP^{-1} \Rightarrow D$ är en diagonalmatris o.m.m kolonnerna i P är n-linjär oberoende egenvektorer av A. I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden av A (i samma ordning som egenvektorerna i P)

__Ex__ Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vi söker inverterbar matris P och diagonal matris D

$\Rightarrow A = PDP^{-1}$

__Steg 1__ Bestäm egenvärde av A

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

Egenvärder : $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$

__Steg 2__ Bestäm motsvarande egenvektorer

(Sedan A är 3×3 matris vi ska få 3 egenvektorer)

$(A-\lambda I)u = 0$

__$\lambda_1 = 1$__

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_1 = 0$

$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = -u_3$

$-u_1 = 0$ $\quad u_3 = 3$

$\Rightarrow u = s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s \neq 0$

Egenrummet $E_{\lambda_1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

__$\lambda_2 = 2$__

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_1 + w_3 = 0$ $\quad w_1 = -w_3$

$-w_1 - w_3 = 0$

2 fria

$w_3 = s$

$w_2 = t$

$$w = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s,t) \neq (0,0)$$

Egenrummet $E_{\lambda_2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Steg 3 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

egenvektor v egenvektorer w

Steg 4 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Steg 5 Beräkna P^{-1}.
Istället, vi kan kolla om $AP = PD$ (om P är inverterbar)

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sats (5.3.6) Om $n \times n$-matris A har n-olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Sats (5.3.7) (Om egenvärdena är ej distinkta)
Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \times n$ matris) med p distinkta egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $p \leq n$

a) För $k = 1, \dots, p$ så är egenrummet till λ_k mindre eller lika ($\leq$) med multipliciteten för λ_k $1 \leq k \leq p$

b) A är diagonaliserbar o.m.m summan av dimensionen på egenrummet för de olika egenvärdena är n. Detta händer omm:
   1) Den karakteristiska ekv. har n linjära faktorer
   2) Dimensionen av λ_k:s egenrum är lika med λ_k:s multiplicitet

c) Om A är diagonaliserbar och $\mathcal{B}_k$ är en bas för egenrummet till λ_k så är $\underbrace{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p}_{\text{alla vektorer i } \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots \mathcal{B}_p}$ en egenbas för $\mathbb{R}^n$