LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONEN

L14

Vi analyserar systemet som är AUTONOMT (= variabel är tid) och LINJÄRT, dvs
$f(t,x) = f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

I många tillämpade problem vi ser hur systemet utvecklas (förändra) i tid. Vi kan beskriva dessa förändringar med system av diff.ekv.:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

$x_1 \dots x_n$ differentierbar funktioner av t

$x_1' \dots x_n'$ derivater

a_{ij} - reella konstanter

~~Vikt~~ Viktigaste: Systemet är LINJÄRT!! (*)

Systemet är ekvivalent med den följande matris ~~ek~~ diff.ekv.

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad . \quad (1)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

(*) Ek. (1) är linjär, sedan både differentierbar funktion och vektor multiplikation med matris är linjär avbildningar.

Om u och v är två lösningar av $x'(t) = Ax$, då är $c_1u + c_2v$ också en lösning: $(c_1u + c_2v)' = c_1u' + c_2v' = c_1Au + c_2Av$
$= A(c_1u + c_2v)$

Lösningarna u och v är inte unika, men om man fixerar BEGYNNELSVÄRDEN $x(0) = x_0$, då finns en entydig lösning. (initial value)

OKOPPLADE EKVATIONER

Om A är diagonal, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, då blir ekvationerna OKOPPLADE

$x_1' = \lambda_1 x_1$, $x_2' = \lambda_2 x_2$ ... $x_n' = \lambda_n x_n$ och kan lösas:

$$x_1' = \lambda_1 x_1 \Leftrightarrow x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$
$$x_n' = \lambda_n x_n \Leftrightarrow x_n = C_n e^{\lambda_n t}, \quad C_n \in \mathbb{R}$$

Vi kan skriva den allmänna lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

och man hittar konstanterna c_i från begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$.

Ex
$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ x_2 = -5x_2 \end{cases} \quad \text{har lösningar} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Om $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$.

DIAGONALISERING AV DYNAMISKA SYSTEM

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matris med n linjär oberoende egenvektorer $\Rightarrow A$ är diagonaliserbar.

$A = PD^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1, .. \lambda_n$ - egenvärdena till A

$v_1, .., v_n$ - egenvektorer som utgör ~~en bas~~ en bas

$$P = [v_1, v_2, .. v_n]$$

Betrakta ekv. $x' = Ax \Leftrightarrow x' = PD^{-1}P\,x \Rightarrow P^{-1}x' = D^{-1}Px$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(P^{-1}x) = D(P^{-1}x)$$

$P^{-1}x = y \Rightarrow y'(t) = D\,y(t) \rightarrow$ koefficientenmatris är diagonal och vi har okopplade ekv.

$y(t) = P^{-1}x(t)$

Lösningen: $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, .., y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$, $c_i \in \mathbb{R}$

Eftersom: $x = Py = [v_1, .., v_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Konstanterna C_i beräknas genom att sätta $X(0)=X_0$

$\Leftrightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = X_0$

Vi ser att C_i är just koordinaterna av X_0 m.a.p basen $\{v_1, \dots, v_n\}$

Exempel: Lös diff.ekv.systemet $\cancel{A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}}$ $\begin{cases} x_1' = 8x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -10x_1 - 7x_2 \end{cases}$

$x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Vi diagonaliserar matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$

$$\det\begin{bmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 3}, \boxed{\lambda_2 = -2} \text{ egenvärdena}$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow v_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ egenvektor}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1 \Rightarrow v_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ egenvektor}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Lösningen är: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 =$

$$= c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow x_1(t) = 3e^{3t} - 2e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -3e^{3t} + 4e^{-2t}$$

Exempel 2 Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, bestäm lösningen till $x' = Ax$ som uppfyller $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((3-\lambda)^2-4\right) = (1-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)$$
$$= (1-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Egenvärden: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$

Motsvarande egenvektorer:

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ planet som spänns upp av $\begin{cases} v_1 = (1,0,1) \\ v_2 = (2,-1,0) \end{cases}$

$\underline{\lambda_3 = 5}$ $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow v_3 = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A är diagonaliserbar

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

__Lösningen:__ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 1 \\ \quad\; - c_2 - c_3 = 1 \\ c_1 \qquad\;\; + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3/2 \\ c_2 = -1/2 \\ c_3 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \overbrace{\tfrac{3}{2}e^t - 2\cdot\tfrac{1}{2}e^t}^{} + \overbrace{\tfrac{1}{2}e^{5t}}^{} = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{5t} \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{5t} \\ x_3 &= \tfrac{3}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{5t} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{e^{5t}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{5t}}; \quad \boxed{x_2(t) = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{5t}}; \quad \boxed{x_3(t) = \tfrac{3}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{5t}}$$