TMV141

L2

Repetition

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{\text{Koefficientmatris } a_{ij}} \left| \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{HL(b_j)} \right.\right)}_{\text{Totalmatris } (a_{ij} | b_j)}$$

<u>Sats</u> Ekv. systemet har precis:
- en lösning
- ingen lösning
- eller oändligt många lösningar

<u>Ex1</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & k \end{array}\right) \begin{matrix} -1 & -2 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & k-2 \end{array}\right)$$

pivotel.

$$R_3 = -R_2 + R_3 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k-2} \end{array}\right)$$

pivotel. $\neq 0$ $k-2 \neq 0$

$$\boxed{k=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1/2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ -1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{array}\right)}_{\text{RREF}}$$

$x_1, x_2$ - bundna

$x_3$ - fria

$$x_1 + 0x_2 - 7/2\, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 7/2\, x_3$$

$$0x_1 + x_2 + 3/2\, x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3/2\, x_3$$

Fria variablerna får parameternamn, t ex $x_3 = s$

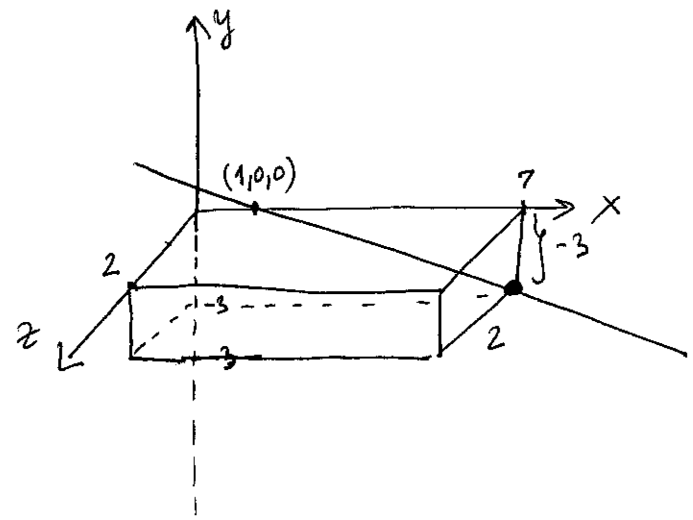
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(1+\frac{7}{2}s, -\frac{3}{2}s, s\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{7}{2}s \\ -\frac{3}{2}s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/2s \\ -3/2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{s}{2} = t \ , \ s \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

genom $(1,0,0)$ med riktningsvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Punkter $(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbb{R}^3$ beskriver en linje i $\mathbb{R}^3$




# Vektorekvationer

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en ordnad lista med $n$ reella tal.
Vi skriver en vektor $u$ i $\mathbb{R}^n$ som en $1 \times n$ - matris (kolonnmatris)

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} \qquad Ex: u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller som geometriska vektorer i planet respektive rummet.

<u>Algebraiska</u> operationer:

# addition, subtraktion:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix}$$

**Ex1** $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$u + v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 3+5 \\ 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

\# multiplikation med skalär

$$\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix} ; \quad (-1) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Addition, subtraktion av vektorer och multiplikation med skalär sker koordinatvis.

**Ex2** $\lambda = 2$ $\quad \lambda \cdot u = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

De algebraiska operationerna uppfyller vanliga räkneregler; om $u, v$ och $w$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, och $c, d$ är skalärer, så gäller:

1) $u + v = v + u$
2) $(u + v) + w = u + (v + w)$
3) $u + 0 = 0 + u = u$
4) $u + (-u) = -u + u = 0$
5) $c(u + v) = c \cdot u + c \cdot v$
6) $(c + d)u = c \cdot u + d \cdot u$
7) $c(du) = (c \cdot d) \cdot u$
8) $1 \cdot u = u$

**Def** En LINJÄRKOMBINATION av vektorerna $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ med vikterna $c_1, \ldots, c_k$ är vektorn $y$ som ges av:

$$y = c_1 \cdot v_1 + \ldots + c_k v_k$$

Mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \ldots, v_k$ kallas LINJÄRA HÖLJET (eng. linear span) av $v_1, \ldots, v_k$ eller delmängden av $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av $v_1, \ldots, v_k$.
Betecknas $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Låt $a_1, \dots, a_K, b$ vara givna vektorer i $\mathbb{R}^n$. Betrakta en vektorekvation $x_1 a_1 + \dots + x_K a_K = b$ (1)

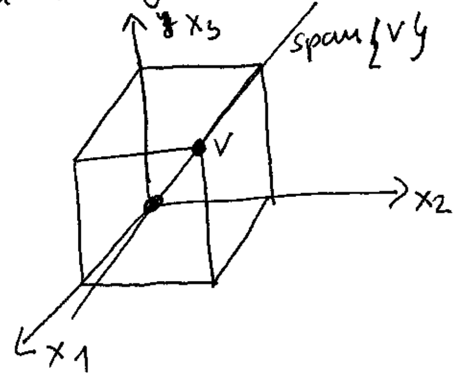
med $x_1, \dots, x_K$ som obekanta. Så blir (1) ekvivalent med ekv. systemet vars totalmatris är $[a_1 \dots a_K | b]$.

Vi har alltså att $b$ är en linjärkombination av $a_1, \dots, a_K$ omm (om och endast om) respektive ekv.systemet är LÖSBART (konsistent (har minst en lösning)).

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots \quad a_K = \begin{bmatrix} a_{1K} \\ \vdots \\ a_{nK} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

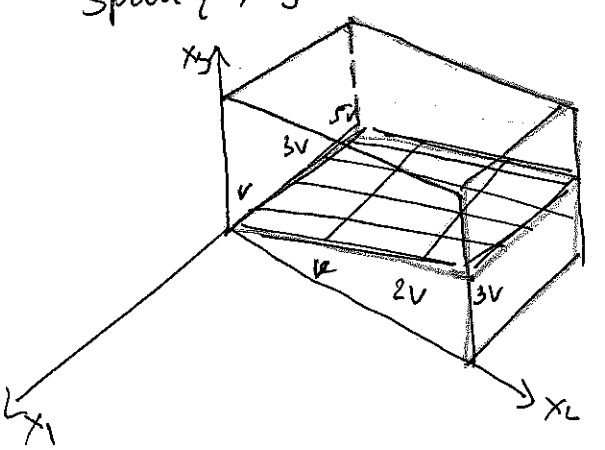
## Geometrisk beskrivning

Låt $v \in \mathbb{R}^3$. Span$\{v\} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ = alla punkter på linjen genom origo och punkten $v$.




Låt $u, v \in \mathbb{R}^3$ som inte är muliplar av varandra.

Span$\{u, v\}$ planet som innehåller $u$, $v$ och $0$



**Sats** Låt $A$ vara $m \times n$ matris ($m$ rader och $n$ kolonner), $A = [a_1 \dots a_n]$, där kolonnerna i $A$ är vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Låt $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Då är produkten $Ax$ linjär kombination av kolonnerna i $A$ med vikterna $x_1, \dots, x_n$:

$$Ax = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

Matrisekv. $Ax = b$ har alltså samma lösningar som vektorekv. $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$ som i sin tur har samma lösningar som ekv.systemet vars totalmatris är $[a_1 \dots a_n | b]$.

**Beräkning av $Ax$**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4x_1 \\ 7x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 8x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 6x_3 \\ 9x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \end{bmatrix}$$

När en mängd av vektorer i $\mathbb{R}^m$ spänner upp $\mathbb{R}^m$?

**Sats 1.4.4** Låt $A$ vara $m \times n$ matris. Då är följande utsagor logiskt ekvivalenta.

1) För varje $b$ i $\mathbb{R}^m$ har ekv. $Ax = b$ minst en lösning
2) Varje $b$ i $\mathbb{R}^m$ är linjär kombination av kolonnerna i $A$
3) Kolonnerna i $A$ spänner upp $\mathbb{R}^m$.

4) A har pivotposition i varje rad
5) Ekv. systemet med totalmatrisen $[A|b]$ är konsistent för varje $b$ i $\mathbb{R}^m$.

<u>Notera</u>: 1)–4) gäller för koefficientmatris $a_{ij}$, inte för totalmatris

<u>Sats 1.4.5</u> Om $A$ är en $m \times n$ matris, $u$ och $v$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och $c$ är en skalär, så gäller:

$$A(u+v) = Au + Av$$
$$A(cu) = cAu$$

## <u>Homogena linjära ekv. system</u>

Ekv. system $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$
där $a_1, \dots, a_n$ är givna kolonnvektorer i $\mathbb{R}^m$, kallas för <u>homogent linjärt ekv. system</u>.
Systemet har alltid en lösning $x = 0 = (0, \dots, 0)$ den triviala lösningen. Viktig frågan är när systemet har någon icke-triviala lösning $x \neq 0$.
Det har icke-triviala lösningar o.m.m. ekvationen har minst en frivariabel, dvs. matrisen $A = [a_1, \dots, a_n]$ har minst en icke-pivot kolonn.

## <u>Icke-homogene linjära ekv. system</u>

<u>Sats 1.5.6</u> Antag ~~ett~~ ekv. $Ax = b$ är konsistent för ett visst högerled $b$ och låt $p$ vara en lösning. Då är ekvationens lösningsmängd alla vektorer på formen $w = p + v_h$, där $v_h$ är en lösning till respektive homogena ekvationen $Ax = 0$.