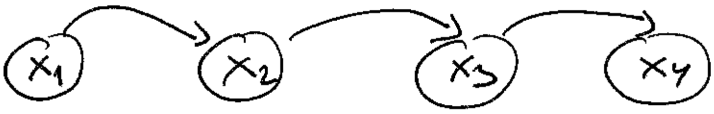
THV143 MARKOV KEDJA

L20

Def Markov kedja är en diskreet stokastisk process med diskret tid. Tillståndet för systemet vid tiden t+1 beror ~~enda~~ endast på systemets tillstånd vid tiden n.

$Pr[X(t_{n+1})=j \mid X(t_n)=i]$



$Pr[X_{t+1}=x_{t+1} / X_t = x_t]$

övergångssannolikheten (transition probability) att systemet som är i tillståndet X_t vid tid t befiner sig i X_{t+1} vid nästa tid $t+1$.

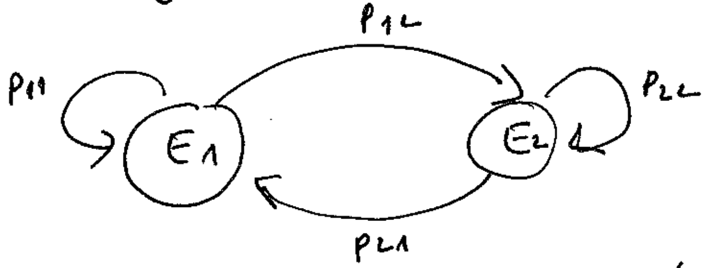
Markovprocessen är MINNESLÖS – övergångssannolikheten beror endast av "nu-läge" dvs. situation en vid tidpunkten t_n och inte av vägen till detta tillstånd.

Övergångssannolikheten: $p_{ij} = P(E_i \to E_j) = P[X(t_{n+1})=j / X(t_n)=i]$

Övergångsmatrisen (transition probability matrix)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

där $\sum_k p_{ik} = 1$ för varje i
dvs. summan av alla element i en rad är lika med 1.



$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$p(0)$ – sannolighets vektor i punkt 0

$\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0) \ldots)$

processen startar i E_1 med sannolighet $p_1(0)$
E_2 $p_2(0) \ldots$

→ Summan av alla sannolikhets vektorer är 1

$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) P$

$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot P = \vec{p}(0) P^2$

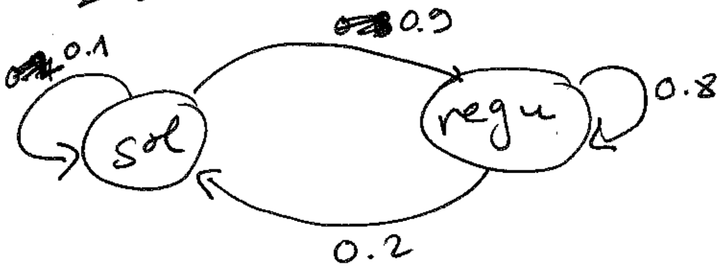
$p(3) = \vec{p}(2) P = \vec{p}(0) P^3$

$\vdots$

$p(n) = \vec{p}(0) P^n$

Ex2 Vädret

2 olika tillstånd: ① sol ② regn



regn idag ⇒ 80% regn imorgon
20% sol imorgon

sol idag ⇒ 10% sol imorgon
90% regn imorgon

Övergångsmatris $P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

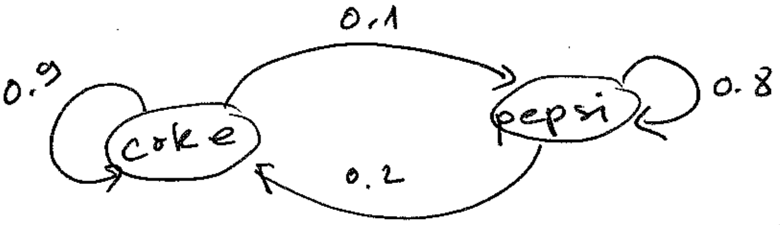
$$\begin{array}{c|cc} & \text{sol} & \text{regn} \\ \text{sol} & 0.1 & 0.9 \\ \text{regn} & 0.2 & 0.8 \end{array} \quad \begin{matrix} =1 \\ =1 \end{matrix} \qquad \begin{array}{c|cc} & \text{regn} & \text{sol} \\ \text{regn} & 0.8 & 0.9 \\ \text{sol} & 0.2 & 0.1 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

Ex3 Coke vs Pepsi

Om en person köpte Cola sist, det är 90% sannolikhet att nästa gång hen köper också Cola.

Om en person köpte Pepsi sist, det är 80% sannolikhet att nästa gång hen köper också Pepsi.

$$P = \begin{array}{c|cc} \text{To:} & \text{coke} & \text{pepsi} \\ \text{coke} & 0.9 & 0.1 \\ \text{pepsi} & 0.2 & 0.8 \end{array} \quad :\text{From}$$



Om idag köper bara Pepsi, vad är för sannolikhet att jag köper Coke 2 köp från idag?

$$Pr[\text{Pepsi} \to ? \to \text{Coke}] = Pr[\text{Pepsi} \to \text{Coke} \to \text{Coke}] + Pr[\text{Pepsi} \to \text{Pepsi} \to \text{Coke}] = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.34$$

$$P^2 = \underbrace{\begin{array}{cc} \text{coke} & \text{pepsi} \\ \hline 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{array}}_{\text{Pepsi}} \; \begin{array}{cc} \text{coke} & \text{pepsi} \\ \hline 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{array} = \begin{array}{cc|c} \text{coke} & \text{pepsi} & \\ 0.83 & 0.17 & \text{coke} \\ 0.34 & 0.66 & \text{pepsi} \end{array} \approx 0.34$$

$\to$ Coke

3 ~~köp från idag~~? Köper Coke idag, sannolikhet att ska köpa Pepsi 3 köp från idag?

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} \text{coke} & \text{pepsi} & \\ 0.781 & 0.219 & \text{coke} \\ 0.438 & 0.562 & \text{pepsi} \end{array} \approx 0.219$$

- Varje person köper en dricka / vecka
- Antar att 60% dricker Coke och 40% dricker Pepsi
- Antal personer som dricker Coke 3 veckor från idag?

$\vec{p}(0) = (0.6 \;\; 0.4)$ start vektor

$\vec{p}(3) = p(0)\, P^3 = (0.6 \;\; 0.4) \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} = (0.6438 \;\; 0.3562)$

$\approx$ 2/3 dricker Coke efter 3 veckor.