TMV141
L4

Matrisalgebra

Låt A vara $m \times n$-matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,\, j=1}^{m,\, n}$$

(i,j) - position är positionen i rad i och kolonn j.

a_{ij} (eller $(A)_{ij}$) är elementet på (i,j)-position.

rad $i(A)$ - rad i i matrisen A

kol $j(A)$ - kolonn j i matrisen A

Om $m=n$ matrisen A kallas en KVADRATISK matris.

Om alla $a_{ij}=0$ så är A $m \times n$ - NOLLMATRISEN (O_{mn})

Om $m=n$ och $a_{ij}=0$, $i \neq j$ och $a_{ii}=1$ kallas A IDENTITETSMATRISEN (eller ENHETSMATRIS) - I_n

En DIAGONALMATRIS är en KVADRATISK MATRIS där alla element utanför diagonalen är nollor.

Diagonal element a_{ii}, $m=n$

Två matriser $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ är lika om de har samma storlek och $a_{ij}=b_{ij}$, för alla i,j.

Ex 1

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 10 \\ -3 & 0 & 12 & -4 \\ -8 & 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

3 radar och 4 kolonner

$a_{23} = 12$ $\quad a_{34} = 9$

$a_{11} = 5$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$ - KVADRATISK MATRIS

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$ - IDENTITETSMATRIS

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$ – DIAGONALMATRIS
Diagonal el. 3, 2, −5

Matrisoperationer

Addition

Matriser av samma storlek kan adderas. Addition sker genom att elementen på samma position adderas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

Alla matris elementen multipliceras med skalären

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Note</u> $A+B$ och $c \cdot A$ är också $m \times n$ matriser.

<u>Ex 1</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $c = 3$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4+(-7) & 5+1 & -6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 7 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 11 & 4 & -14 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation

Om antalet kolumner i A är samma som antalet rader i B kan produkten AB bildas. Om A är $m \times n$ matris och B är $n \times p$ matris så blir AB $m \times p$ matris.

Rad-kolumn regel för beräkning av matrisprodukt:

$$(AB)_{ij} = \text{rad}_i(A) \cdot \text{kol}_j(B)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ & & & & \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ \boxed{a_{i1} \cdots a_{ip}} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & & c_{mn} \end{bmatrix}$$

__Ex3__ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2 \\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+4 \\ 3+0 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Läxa: $B\cdot A$

__Ex4__ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot4 & 1\cdot3+2\cdot2 \\ 3\cdot5+4\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot4 & 3\cdot3+4\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 11 & 16 & 17 \end{bmatrix}$$

Räkneregler för matrisoperationer:

Antag att A, B och C är matriser och k_1, k_2 skalär

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) $A+0 = A$
3) $A+(-A) = 0$
4) $A+B = B+A$
5) $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$
6) $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$
7) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8) $1\cdot A = A$ och $0\cdot A = 0$
9) $A(BC) = (AB)C$ - associativ lag
10) $A(B+C) = AB + AC$ - vänsterdistributiv
12) $(B+C)A = BA + BC$ - högerdistributiv lag
13) $k_1(AB) = (k_1A)B = A(k_1B)$
14) $I\cdot A = A = A\cdot I$

Varning!

1) $AB = BA$, allmänhet
2) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
3) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$

Def TRANSPONATET av $n \times m$-matris A är $m \times n$ matrisen A^T vars kolonnvektorer är radvektorerna i A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Exs $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

Sats Låt A, B vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(rA)^T = r \cdot A^T$ för varje skalär r
4) $(AB)^T = B^T A^T$ Notera ordningen!!!