TMV141
L5

# Determinanter

Om $A$ är en $m\times n$-matris så låter vi $A_{ij}$ vara den matris där vi har tagit bort rad $i$ och kolonn $j$, dvs:

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Def** Låt $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Om $n=1$ är determinant av $A$, $\det(A)=a_{11}$

Om $n\geq 2$ så ges $\det(A)$ av:

$$\det(A)=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det(A_{1j})}_{2}=a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+\dots+\underbrace{(-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}}_{1}$$

**Ex1**

$\underline{n=1}$ $\quad A=[5]$, $\det(A)=5$

$\underline{n=2}$ $\quad A=\begin{bmatrix}3&4\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow$ ~~det(A)=3·1−4·2=3−8=−5~~

$\det(A)=3\cdot1-4\cdot2=3-8=-5$

$(-1)^{2+1}=-1^3=-1$

$$\underset{}{\overset{=3}{a_{11}}}\det\overset{=1}{A_{11}}-\underset{=4}{a_{12}}\det\underset{=2}{A_{12}}=3\cdot1-4\cdot2=-5$$

$\underline{n=3}$ $\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$

Metod 1

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\4&5\\7&8\end{matrix}=(1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8)-(7\cdot5\cdot3+8\cdot6\cdot1+9\cdot4\cdot2)=0$$

Metod 2

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

## KOFAKTOREXPANSION

Talet $C_{ij} = (-1)^{j+1} \det(A_{ij})$ kallas $(i,j)$e KOFAKTOR av A.

Determinanten $\det(A_{ij})$ given av:

$$\det(A) = \cancel{a_{11}}\, a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \ldots + a_{1n} C_{1n}$$

kallas KOFAKTOREXPANSIONEN av matris A första rad

Sats Determinanten av en $n \times n$ matris A kan beräknas genom kofaktorexpansion av godtycklig rad eller kolonn.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} C_{ji}, \text{ för valfritt } i = 1, 2, \ldots, n$$

$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$

$i$-rad

$$\text{Faktor } (-1)^{i+j} = \begin{array}{ccc} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$

$j$-kolonn

Ex 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

3:e rad mest 0or

$$\det A = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} C_{33} =$$

$$= (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33} \det A_{33} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - (-2)(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) + 0 = 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{2}}$$

**Sats** 3.1.2 Om A är triangulär så är det(A) ~~[illegible]~~ produkt av diagonalelementen.

**Sats** 3.2.3 Låt A vara en kvadratisk matris:

(1) Om en multiple av en rad i ~~A~~ adderas tillen annan rad så vi producerar en ny matris B, så gäller att

$$\det(B) = \det(A)$$

(2) Om man byter plats på två rader i A så gäller för den nya matrisen B att: $\det(B) = -\det(A)$

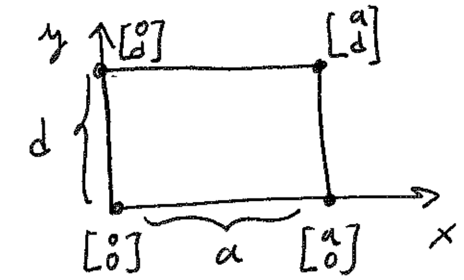
(3) Om man multiciplera en rad i A med ett tal k så gäller att $\det(B) = k \cdot \det(A)$

# Determinanten som area och volym

**Sats (3.3.9)** Om $A$ är en $2\times 2$ matris, då är $|\det(A)|$ arean av parallellogramen som spänns upp av $A$:s kolonner.
Om $A$ är en $3\times 3$ matris, då är $|\det(A)|$ volymen av parallellepipeden som spänns upp av $A$:s kolonner.

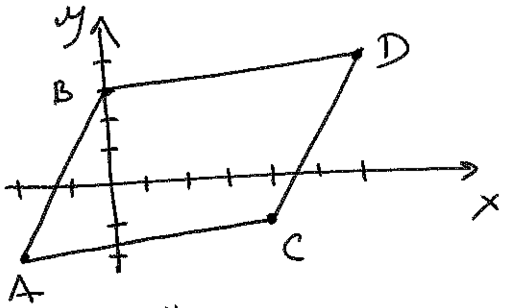
**Ex**

1)



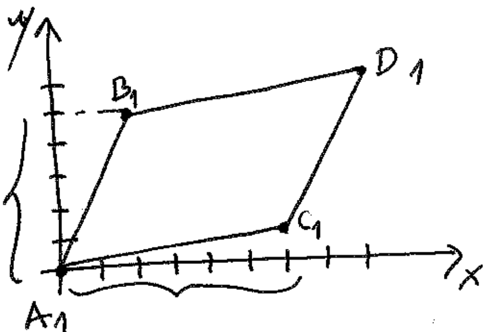

$$\text{area} = a\cdot d = \left|\det\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{vmatrix}\right| = ad$$

2) Beräkna area av en parallellogram med koordinater $A(-2,-2)$, $B(0,3)$, $C(4,-1)$, $D(6,4)$



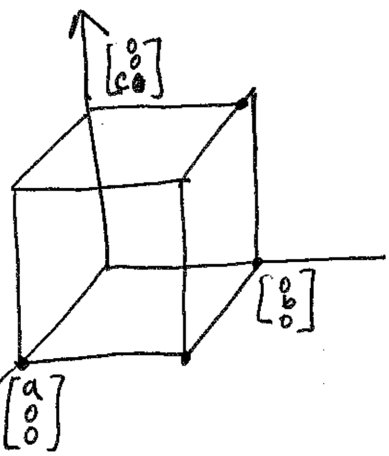

$$A(-2,-2) \to A_1(\overset{-2-(-2)}{0}, \overset{-2-(-2)}{0})$$
$$B(0,3) \Rightarrow B_1(0-(-2),\ 3-(-2)) \Rightarrow B_1(2,5)$$
$$C(4,-1) \Rightarrow C_1(4-(-2),\ -1-(-2)) \Rightarrow C_1(6,1)$$
$$D(6,4) \Rightarrow D_1(6-(-2),\ 4-(-2)) \Rightarrow D_1(8,6)$$

$\Downarrow$




$$\text{area} = \left|\det\begin{array}{cc} B_1\downarrow & \downarrow C_1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1\end{vmatrix} \end{array}\right| = |2-30| = |-28| = 28$$

3)



$$V = a\cdot b\cdot c = \left|\det\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}\right| = abc$$