28 REPETITION (V1 + V2)

TMV141

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ekv. sys.

$\Leftrightarrow$

Matrisform

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{koefficientmatris} \\ a_{ij}}} \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{HL}}_{\text{Totalmatris } (a_{ij} | b_i)}$$

$\Leftrightarrow$

Vektorform

$[a_1, \dots, a_n | b]$

$a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

Homogent sys $\Rightarrow b_i = 0$
$\Rightarrow$ har alltid triviala lösningen $x = 0$

Inhomogent $\Rightarrow b_i \neq 0$
$\Rightarrow$ har icke triviala lösningen o.m.m. har någon fri variabel
$\Rightarrow$ har oändligt många lösningar

$m = n$ - kvadratiskt
$m < n$ - underbästemt
$m > n$ - överbästemt

$m \times n$ - matris
m - rader
n - kolonner

Bundna variabler:

Variabler som hör ihop med kolonner med pivotel.

Fria variabler

Variabler som hör ihop med kolonner utan pivotel.

Pivotel.: Ledande tal i en trappstegsform

TRAPPSTEGSFORM (REF) - rektangulär totalmatris:

a) alla icke-nollrader är ovanför alla nollrader
b) varje ledande tal i en rad är strikt till höger om det ledande talet i raden före
c) alla tal i en kolonn under ett ledande tal är noll

REDUCERAD TRAPPSTEGSFORM (RREF)

a) + b) + c) + d) det ledande talet i varje nollskild rad är 1
e) varje ledande ~~t~~ etta är det enda nollskilda talet i kolonnen.

REF $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$ RREF $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & & 3 \end{bmatrix}$

LINJÄRT OBEROENDE omm. vektrekv: $x_1u_1 + \dots x_pu_p = 0$ endast har triviala lösning.

LINJÄRT BEROENDE omm vektrekv: $x_1u_1 + \dots x_pu_p = 0$ har också en icke-triviala lösningen.
Minst en av vektorerna är en linjär kombination av de övriga.

Matriser

$m = n$ - kvadratisk matris ($n \times n$ matris, $\mathbb{R}^{n\times n}$)

IDENTITETSMATRIS (ENHETSMATRIS) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ $i \neq j$

TRANSPONATET (A^T) Om A är $m \times n$ matris $\Rightarrow$ A^T är $n \times m$ matris

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

INVERSEN (A^{-1}) $C \cdot A = I = A \cdot C$ $\Rightarrow$ C är inversen till A, $C = A^{-1}$

2x2 matriser $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$
A är inverterbar

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

3x3 matriser och vidare ($n \geq 2$) Överför matrisen $[A/I]$ till reducerad trappsteg form; Om den är $[I/B] \Rightarrow B = A^{-1}$

Kvadratisk matris är inverterbar o.m.m. $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 0$ om A:s kolonner är linjär beroende
$\det(A) = 0$ om A:s rader är linjär oberoende

DETERMINANTER

$n = 2$ (2x2 matris) $\det A = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - bc$

$n > 2$ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$

Linjära ekv.sys har PRECIS EN LÖSNING omm systemets determinant är $\neq 0$.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ PRECIS EN LÖSNING

Om $\det(A) = 0$ har systemet antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar.

$\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{1) ingen LÖSNING} \\ \text{2) OÄNDLIGT många lösningar} \end{cases}$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ matrisen A är inverterbar $\Leftrightarrow$ systemet $Ax = B$ har exakt en lösning $X = A^{-1}B$

Exempel

1. Lös systemet $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=9 \\ x+y+2z=7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=9 \\ x+y+2z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{ekv2} - \text{ekv1} \\ \text{ekv3} - \text{ekv1} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z=3 \\ z=1 \end{cases}$$

Vi har fått trappstegs form och löser ut de ledande variablerna. $\boxed{z=1}$

$y+1=3 \Rightarrow \boxed{y=2}$

$x+2+1=6 \Rightarrow \boxed{x=3}$

Systemet har precis en lösning $x=3$, $y=2$, $z=1$ (dvs. inga fria variabler)

2. Lös systemet $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+2y+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\cdot\text{ekv1} - \text{ekv2} \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 0=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ systemet har ingen lösning

3) Lös systemet $\begin{cases} x+4y+5z=1 \\ 2x+8y+10z=2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\text{ekv1} - \text{ekv2} \begin{cases} x+4y+5z=1 \\ 0=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ oändligt många lösningar

$\Rightarrow x = 1-4y-5z$ $\quad y, z$ - fria

$y=t$ och $z=s$ och beskriva lösningen:

$x = 1-4t-5s$

$y = t$

$z = s$

Lösning med hjälp av systemets totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 10 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ trappstegform

Lösbart system (ingen ledande etta i andra delen). En ledande etta men 3 variabler x, y, z. Vi kan lösa ut en variabel (ledande x). Två andra y och z är fria.

4) Lös följande system med avseende på x och y för alla värden på parametrarna a och b.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 1-2y \longrightarrow 2(1-2y) + ay = b \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ (a-4)y = b-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

a) $a \neq 4$ Systemet har exakt en lösning

$$y = \frac{b-2}{a-4}, \quad x = 1-2y = 1-2\cdot\frac{b-2}{a-4} = \frac{a-2b}{a-4}$$

b1) $a = 4$ och $b-2 \neq 0$ dvs $b \neq 2$

Systemet har följande form:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = b-2 \end{cases} \quad \text{där } b-2 \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 \neq 0$$

Systemet saknar lösning.

b2) $a = 4$ och $b-2 = 0$ dvs $b = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y \end{cases}$$ y - fri variabel (oändligt många lösningar)

$$y = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $a \neq 4 \Rightarrow$ systemet har exakt en lösning

$a = 4$ och $b \neq 2 \Rightarrow$ systemet har INGEN lösning

$a = 4$ och $b = 2 \Rightarrow$ systemet har OÄNDLIGT MÅNGA lösningar

5) Beräkna inverse av matris A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \Rightarrow R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \Leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \Rightarrow -R_2 \\ R_3 \Rightarrow -R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \Rightarrow R_2 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \Rightarrow R_1 - 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \Rightarrow R_1 - 3R_3} \underset{[I \mid B]}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6) Om A och B är 2×2 matriser och k - skalär

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}, \quad k = 4$$

Bevisa följande:

a) $A + B = B + A$

b) $k(A+B) = kA + kB$

c) $AB \neq BA$

d) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

a)
$$A+B=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & -4\end{bmatrix}$$

$$b+A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & -4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A+B=B+A$

b)
$$4\left(\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}\right)=4\cdot\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36 & -4\\ 32 & -16\end{bmatrix}$$

$$4\cdot A=4\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & -4\\ 12 & 16\end{bmatrix}$$

$$4B=4\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 20 & -32\end{bmatrix}$$

$$4A+4B=\begin{bmatrix}28 & -4\\ 12 & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 0\\ 20 & -32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36 & -4\\ 32 & -16\end{bmatrix}$$

$k(A+B)=$
$=kA+kB$

c)
$$A\cdot B=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\cdot 2+(-1)\cdot 5 & 7\cdot 0+(-1)(-8)\\ 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 0+4(-8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 26 & -32\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 7+0\cdot 3 & 2(-1)+0\cdot 4\\ 5\cdot 7+(-8)\cdot 3 & 5(-1)+(-8)4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -2\\ 11 & -37\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow AB\neq BA$

d)
$$\det(A+B)=\det\begin{vmatrix}9 & -1\\ 8 & -4\end{vmatrix}=9\cdot(-4)-(-1)\cdot 8=-36+8=-28$$

$$\det(A)=\det\begin{vmatrix}7 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=7\cdot 4-(-1)\cdot 3=28+3=31$$

$$\det(B)=\det\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & -8\end{vmatrix}=2\cdot(-8)-0\cdot 5=-16$$

$$\det(A)+\det(B)=31-16=15$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$

7) För vilka värden på den reella parametern a är matrisen A inverterbar:

$$A = \begin{bmatrix} (a-3) & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}$$

$\det(A) = (a-3)\cdot a - 1\cdot(-2) = a^2 - 3a + 2$

$\det(A) = 0 \iff a^2 - 3a + 2 = 0 \iff a_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} =$

$= \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$\iff a = 1$ eller $a = 2$

Matrisen är inverterbar omm $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ matrisen A är inverterbar om $a \neq 1$ eller $a \neq 2$.

8) När homogena linjära ekv.-sys. $Ax = 0$ har icke-triviala lösning? (icke-triviala lösning $x \neq (0, 0, \ldots, 0)$)

Homogena ekv.-sys har icke-triviala lösning o.m.m ekv. har minst en fri variabel, dvs. matrisen $A = [a_1, \ldots, a_n]$ har minst en icke-pivot kolonn.

9) a) Är följande 3 vektorer linjärt oberoende?
b) Om vektorerna är beroende bestäm maximalt antal linjärtoberoende vektorer bland dem.
c) Om vektorerna är beroende skriv en vektor som en linjär kombination av andra vektorer.

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

a) Vektorerna ~~u~~ u, v, w är oberoende omm ekv. $xu + yv + zw = 0$ har endast den triviala lösningen $x=0, y=0, z=0$.

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\4\\0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ 0=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Systemet är lösbart, med två ledande variabler x, y och en fri variabel $z=t$.

$(z=t, y=t, x=-2t)$

$\Rightarrow$ lösbart sys. och minst en fri variabel $\Rightarrow$ oändligt många lösningar $\Rightarrow$ i vårt fall vektorerna är BEROENDE.

b) Maximalt antal linjärt oberoende bland de är 2 (pga. 2 ledande variabler)

c) $xu + yv + zw = 0 \Rightarrow -2tu - ty + t w = 0$ för alla t.

$t=1 \Rightarrow -2u - y + w = 0 \Rightarrow w = 2u + y$

dvs. ~~...~~ w är en linjär kombination av u och v.