26/2
2019
TMV143

Repetition V3 + V4

Självbedömning

1° a) Diagonalisera matris $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

b) Bestäm, med hjälp av resultat i a) lösningen till följande sys. av diff.-ekv.:

$$x_1'(t) = 6x_1(t) - x_2(t)$$
$$x_2(t) = -5x_1(t) + 2x_2(t)$$
$$x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 7$$

2° Betrakta en linjär avbildning:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}$$

Bestäm: a) Nul(A); b) Bas till Nul(A); c) Dim Nul(A)

3° Fyll i luckorna:

a) En kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ______________ o.m.m. den har n linjärt oberoende vektorer.

b) Om $\lambda =$ ____ är ett egenvärde till A, då är ______ också 0 och A är ______________.

c) ______________ är mängden av alla lösningar till den homogena ekv. sys. $Ax = 0$

d) ______________ är mängden av alla linjärakombinationen av kolonnerna i A.

e) rank A + dim Nul A = ________

4° Sant eller falskt

a) Om A och B är kvadratiska matriser och $A \cdot B = I$, då är $\lambda = 0$ egenvärde av A

b) Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och A uppfyller följande matris ekv.
$A^2 - 3A + I = 0$, då är A-inverterbar.

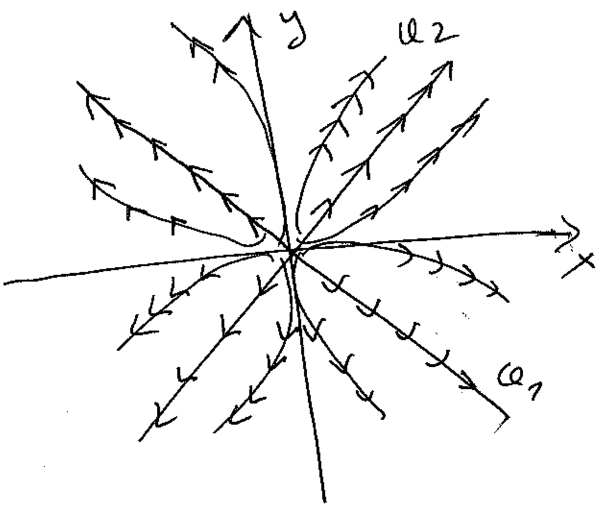
c) Determinanten av en diagonaliserbar matris är lika med produkten av egenvärdena till matrisen.

5° Summan av alla diagonalelement i en kvadratisk matris A kallas för MATRISENS SPÅR och betecknas tr(A)
Låt A vara 2x2 matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

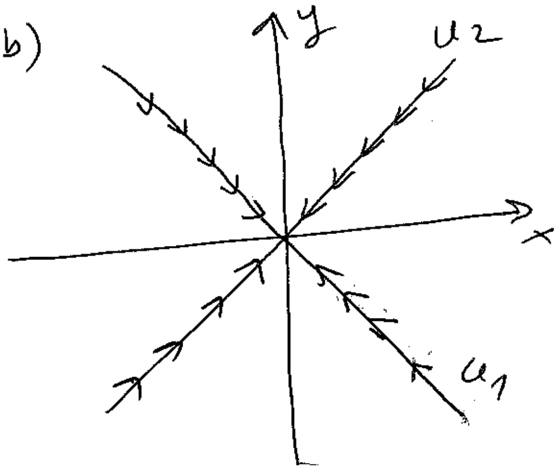
a) Visa att karakteristiska polynomet av A är
$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

b) Om A har två distinkta reella egenvärden λ_1 och λ_2 då är $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

6° a)



b)



u_1 och u_2 är egenvektorer
Hur motsvarande λ_1 och λ_2 ser ut?

a) $\lambda > 0$
b) $\lambda < 0$

Lösningar:

1° a) $A = PDP^{-1} \Rightarrow P = ?,\ D = ?$

$$\det \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 7 \end{matrix}}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 7}}$
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A är diagonaliserbar $\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

b)
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{1 \cdot t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{7t}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{7t} \\ x_2(t) = 5c_1 e^{t} - c_2 e^{7t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = -3 \\ x_2(0) = 7 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -3 = c_1 + c_2 \\ 7 = 5c_1 - c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2/3 \\ c_2 = -11/3 \end{matrix}$$

$$x_1(t) = \tfrac{2}{3} e^{t} - \tfrac{11}{3} e^{7t}$$
$$x_2(t) = \tfrac{10}{3} e^{t} + \tfrac{11}{3} e^{7t}$$

2° Vi bestämmer lösningsmängden till ekv. $T(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Systemet har två ledande variabler x_1 och x_2 och två fria variabler $x_3 = s$ och $x_4 = t$

systemets lösning: $x_1 = t$, $x_2 = -s-2t$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Nul} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nollrummet är en mängd av alla linjära kombinationer som bildas med hjälp av två linjärt oberoende vektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som därför utgör en bas till nollrummet.

$\dim \operatorname{Nul}(A) =$ antalet basvektorer (= antalet fria variabler) = 2

3° a) diagonaliserbar

b) 0, det(A), ej inverterbar

c) Nollrummet

d) kolonnrummet

e) n (antal kolonner)

4°

a) Om $\lambda = 0$ är egenvärde av $A \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow A$ är ej inverterbar.

$\Rightarrow$ det finns inte $B = A^{-1} \Rightarrow AB \neq I$

b) $I = 3A - A^2$

$I = A(\underbrace{3 \cdot I - A}_{B})$, $B = 3 \cdot I - A$ (I - identitets matris)

$I = A \cdot B \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A$ är inverterbar

c) $\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1})$

$= \det(P)\det(P^{-1})\det(D) = \det(\underbrace{PP^{-1}}_{\text{identites matris}})\det D$

$= 1 \cdot \det D$

D är en diagonal matris, med egenvektorer på diagonalen.

Determinanten av en diagonalmatris är produkten av alla diagonal elementen, då följer at $\det(D) = \prod_i \lambda_i$, λ_i - alla egenvärde av A.

5° $tr(A) = a + d$

a) $\det \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2 - bc =$

$= \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a+d)}_{tr(A)} + \underbrace{ad - bc}_{\det(A)} = \lambda^2 - \lambda \cdot tr(A) + \det(A)$

b) $\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) = 0$

$\lambda_{1/2} = \dfrac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4 \cdot 1 (ad-bc)}}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$

$\lambda_2 = \dfrac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{(a+d) + \cancel{\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}} + (a+d) - \cancel{\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}}{2}$

$= \dfrac{2(a+d)}{2} = a + d = tr(A)$

TMV143 Repetition V3+V4

VEKTORRUM

En mängd V med objekter som kallas VEKTORER och två operationer:

1) addition : $u \in V$ och $v \in V$ $\quad u+v \in V$

2) multiplikation med skalär $u \in V$ och $a \in \mathbb{R}$ $\quad a \cdot u \in V$

Följande axiom gäller: $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$

1) $u+v = v+u$
2) $(u+v)+w = u+(v+w)$
3) $u+\vec{0} = u = \vec{0}+u$
4) $u+(-u) = 0$
5) $a(u+v) = au+av$
6) $(a+b)u = au+bu$
7) $(ab)u = a(bu)$
8) $1 \cdot u = u$

UNDERRUM

En delmängd W till ett vektorrum V kallas för ett UNDERRUM om W är ett vektorrum med addition och multiplikation med skalär som gäller i V.

NOLLRUMMET Nul(A)

Mängden av alla lösningar till den homogena ekv. sys. $Ax=0$

KOLONNRUMMET Col(A)

Mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A.

LINJÄRT OBEROENDE VEKTORER

Vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ är LINJÄRT OBEROENDE om

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ (har endast den triviala lösningen)

LINJÄRT BEROENDE VEKTORER

Vektorer $v_1 \ldots, v_n$ är LINJÄRT BEROENDE om

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ har icke-triviala lösningar

(dvs om det finns en lösning där minst ett $\lambda_k \neq 0$)

LINJÄR KOMBINATION

En Vektor w är linjär kombination av $v_1, \ldots, v_n$ om det finns skalär $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ så att $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

BAS

En mängd av vektorer $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ i vektorrum H kallas en bas för H om

(1) B är en linjärt oberoende mängd

(2) $H = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_p\}$

VEKTORRUMETS DIMENSION dim V

Antalet vektorer i en bas för V.

BAS för NOLLRUMMET

Lösningar av homogena ekv. sys. $Ax=0$ i vektorform $\Rightarrow$ oberoende vektorer (de som har fria variabler) utgör en bas

BAS för KOLONNRUMMET

Pivotkolumnerna i matris A bildar en bas

DIMENSION av NOLLRUMMET dim Nul(A)

Antalet fria variabler i ekv. $Ax=0$

DIMENSION av KOLONNRUMMET dim Col(A)

Antalet pivot kolumner i A

RADRUMMET Row(A)

Linjära höljet av alla radvektorer

$\Downarrow$

mängden av alla linjära kombinationer

RANGEN rank(A)

Dimension av kolumnrummet $\Leftrightarrow$ antalet pivotkolumner i A

DIMENSIONSATSEN

$\boxed{\text{rank} A + \text{dim Nul} A = n}$

BASBYTE

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ två baser

$$\underset{C \leftarrow B}{P}^{-1} = \underset{B \leftarrow C}{P} \qquad [c_1, \ldots, c_n \mid b_1 \ldots b_n] \sim [I \mid \underset{C \leftarrow B}{P}]$$

$$[b_1 \ldots b_n \mid c_1 \ldots c_n] \sim [I \mid \underset{B \leftarrow C}{P}]$$

Satsen 2.3.8

EGENVÄRDEN och EGENVEKTORER (kvadratisk matris, $n \times n$, $\in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Låt A vara en $n \times n$-matris. Om det finns en NOLLSKILD vektor v och en skalär λ så att: $Av = \lambda \cdot v$ då kallas:

v - egenvektor till A och λ - egenvärde till A

KARAKTERISTISKA EKV: $\det(A - \lambda I) = 0$

KARAKTERISTISKA POLYNOMET: $\det(A - \lambda I)$

$(\lambda = 0$ är ett egenvärde till $A) \Leftrightarrow (\det(A) = 0) \Leftrightarrow$ (A är INTE INVERTERBAR)

$$A^n \cdot v = \lambda^n v$$

DIAGONALISERING

Kvadratisk matris A är diagonaliserbar om det finns en INVERTERBAR matris P och en DIAGONAL matris D så att:

$$D = P^{-1} A P$$

P - kolumnerna i P är n linjär oberoende egenvektorer till A

D - motsvarande egenvärden till A (samma ordning som egenvektorer i P)

Att diagonalisera en matris $A \Rightarrow$ att hitta en inverterbar matris P och en diagonalmatris $D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar o.m.m. den har n linjärt oberoende egenvektorer !!

LINJÄRA DIFF. EKV.

$$x_1' = a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$X(0) = X_0$ — BEGYNNELSEVÄRDEN

$$\Rightarrow X = c_1 e^{\lambda_1 (t)} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n (t)} v_n, \quad c_i \in \mathbb{R}$$