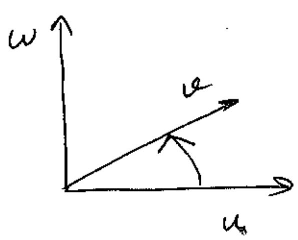
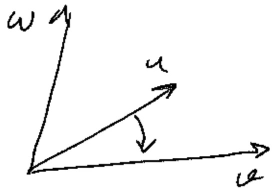
Vektor produkt (kryss produkt)

Högersystem

u, v, w vektorer i denna ordning bildar högersystem om den minsta vridningen som överför u till en ~~vektor~~ med samma riktning som v synsmoturas, när vi betraktar från spetsen på w.



högersystem



vänstersystem

Vektor(kryss)produkt

Låt $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vara två vektorer.

Det finns oändligt många vektorer w som är ortogonala mot både u och v, dvs som uppfyller ekv. $\begin{matrix} u \cdot w = 0 \\ v \cdot w = 0 \end{matrix}$

<u>Def</u> Låt u och v vara två vektorer, vektor produkt $u \times v$ definieras genom determinant som bildar med hjälp av u, v:

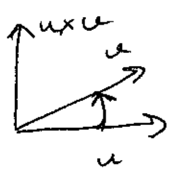
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

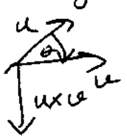
<u>Egenskaper:</u>

1° Längden av vektorprodukten är $|u \times v| = |u||v| \sin\theta$ dvs $|u \times v|$ är arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna u och v

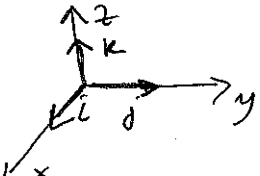
2° Vektorprodukt $u \times v$ är ortogonal mot både u och v

3° Om $u \times v \neq 0$, då är vektor produkt riktad så att u, v och $u \times v$ bildar att högersystem:





4° $v \times u = -u \times v$ Vektor produkt är inte kommutativ



$i = (1,0,0)$ $\quad i \times i = 0$ $\quad i \times j = k$ $\quad j \times i = -k$

$j = (0,1,0)$ $\quad j \times j = 0$ $\quad j \times k = i$ $\quad k \times j = -i$

$k = (0,0,1)$ $\quad k \times k = 0$ $\quad k \times i = j$ $\quad i \times k = -j$

11/3
2019
TMV143

Repetition V5+V6

Självbedömning

1° Bestäm den linje $y = kx + m$ som i minsta-kvadrat mening är bäst anpassat till punkterna $(1,4)$, $(0,0)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$.

2° Betrakta kvadratiska formen $Q = 2x^2 + 6xy + 2y^2$

a) Bestäm den tillhörande symmetriska matrisen A

b) Diagonalisera Q

3° Fyll i luckorna:

a) Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ________ om $u \cdot v = 0$

b) Mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W kallas för ________ och betecknas ____.

c) En ortogonal mängd där alla element är ________ kallas för ortonormal mängd

d) En kvadratisk matris kallas ________ om $A^T = A^{-1}$

e) En kvadratisk matris kallas ________ om $A^T = A$

f) En kvadratisk matris A är ________ o.m.m A är symmetrisk, då är $A =$ ________.

g) Med Gram-Schmidts metod alla vektorer kan ________.

4° Sant eller falskt

a) $(\mathrm{Row}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$

b) Om $u \cdot u = 1$, u vektor i $\mathbb{R}^n$, och $P = u \cdot u^T$ och $Q = I - 2P$, då är $Q^2 = I$

c) För en ortogonal matris U gäller $\|U \cdot x\| = \|x\|$, (x-vektor)

d) Produkten av två ortogonala matriser A och B är en ortogonal matris

1° Bestäm den linje ~~y=a+b~~ $y = a + bx$ som i minsta-kvadrat mening är bäst anpassat till punkterna $(1,1)$, $(0,0)$, $(2,-1)$ $(-1,2)$.

$$\begin{aligned} 1 &= a+b \\ 0 &= a \\ -1 &= a+2b \\ 2 &= a-b \end{aligned} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +9/10 \\ -4/5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= +9/10 \\ b &= -4/5 \end{aligned} \qquad \boxed{y = +9/10 - 4/5\, b}$$

2° Antar att $u \cdot u^T = 1$, u är vektor i $\mathbb{R}^n$. Låt $P = u \cdot u^T$ och $Q = I - 2P$. Visa att $Q^2 = I$

$$Q^2 = (I - 2P)^2 = (I-2P)(I-2P) = I^2 - I2P - 2PI + 4P^2 =$$
$$= I^2 - 4PI + 4P^2 =$$
$$= I^2 - 4P + 4P^2 =$$
$$= I^2 - 4P + 4P = I$$

$$P^2 = (u \cdot u^T)^2 = (u u^T)(u \cdot u^T) = u u^T u u^T = 1 \cdot u u^T = u \cdot u^T = P$$

3. Fyll i luckorna:

a) Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ORTOGONALA om $u \cdot v = 0$

b) Mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W kallas ortogonal komplement och betecknas $W^\perp$.

c) ~~En Mängden~~ då En ortogonal mängd där alla alla element är enhetsvektorer kallas ortonormal mängd.

d) En kvadratisk matris A kallas <u>ortogonal</u> om $A^T = A^{-1}$

e) En kvadratisk matris A kallas <u>symmetrisk</u> om $A^T = A$

f) ~~Om~~ En kvadratis matris A är <u>ortogonal diagonaliserbar</u> o.m.m A är symmetrisk, då är $A = \underline{PDP^T}$

g) ~~Metod a~~ ~~Alla vektorer kan ortogonaliseras med hjälp~~
Med Gram-Schmidts metod alla vektorer kan <u>ortogonaliseras</u>

4° sant elle falskt

$\begin{bmatrix} rad\,1 \\ rad\,2 \\ rad\,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} rad\,1 \cdot x_1 = 0 \\ rad\,2 \cdot x_2 = 0 \\ rad\,3 \cdot x_3 = 0 \end{matrix}$

a) $(Row(A))^{\perp} = Nul(A) \Rightarrow Ax = 0$

$W^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x \cdot w = 0 \quad \forall w \in W\}$

S

b) Om $u \cdot u = 1$, och u är vektor i $\mathbb{R}^4$, och $P = u \cdot u^T$ och $Q = I - 2P$, då är $Q^2 = I$

S $Q^2 = (I-2P)^2 = (I-2P)(I-2P) = I^2 - I2P - 2PI + 4P^2 =$
$= I^2 - 4PI + 4P^2 = I^2 - 4P + 4P^2 = I^2 - 4P + 4P = I$

$(P^2 = u \cdot u^T)^2 = (u \cdot u^T) \cdot (u \cdot u^T) = u \cdot \underbrace{u^T \cdot u}_{1} \cdot u^T = u \cdot u^T = P)$

$\Rightarrow$ Om $u \cdot u = 1 \Rightarrow u^T u = 1$

c) För en ortogonal matris U gäller $\|U \cdot x\| = \|x\|$

S $\|Ux\|^2 = (U x)(U x) = (Ux)^T (Ux) = x^T \cdot \underbrace{U^T \cdot U}_{I \text{ p.g.a } U \text{ är ortogonal}} x = x^T \cdot x = \|x\|^2$

d) Produkten av två ortogonala matriser A och B är en ortogonal matris.

S

Ortogonal matriser gäller: $A^T A = A A^T = I$

$(AB)^T \cdot AB = B^T A^T A B = B^T \cdot I \cdot B = B^T \cdot B = I$

2° Betrakta kvadratiska formen $Q = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

a) Bestäm den tillhörande symmetriska matrisen A

b) Diagonalisera Q

c) Ange den ortogonala matrisen P som diagonaliserar Q

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) För att diagonalisera Q måste vi bestämma egenvärden till A

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 9 = 0$ $\nearrow \lambda_1 = 5$, $\searrow \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 5 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 \cdot v_2 = [1\ 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normera vektorer v_1, v_2

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = P\bar{y} \Rightarrow Q(\bar{x}) = \bar{y}^T D \bar{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\Rightarrow Q(x) = 5y_1^2 - y_2^2$$