SI-pass 5: Lin.alg

Hampus Ek - ekha@student.chalmers.se
Hannes Erikson - hanneeri@student.chalmers.se

February 21, 2019

Uppgift 1. Gör uppgift a) och b)

Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

(c) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$. Gör ett variabelbyte $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ som överför Q till en kvadratisk form av typen $cy_1^2 + dy_2^2$. Ange U, c och d. (2p)

Uppgift 2

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm determinanterna av var och en av matriserna A^{-1}, B och $A^{-1}B$.

(b) Ge exempel på värden för a och b som medför att systemet $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ har unik, ingen, respektive oändligt många lösningar. (3p)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 3

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. (4p)

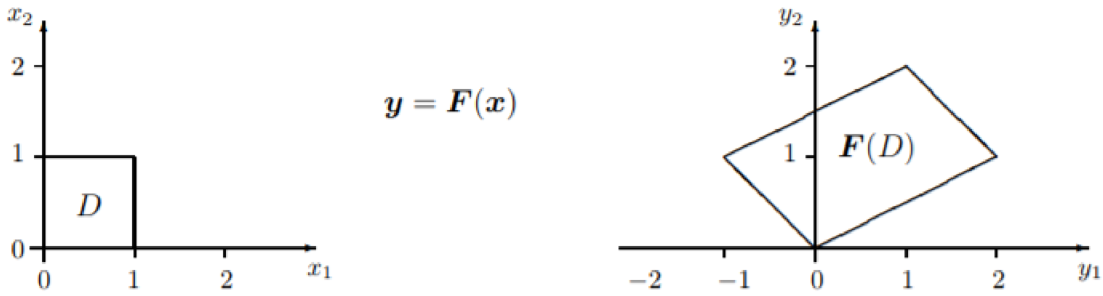
(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (3p)

$$x_1'(t) = 6x_1(t) - x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -5x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$x_1(0) = -3, \; x_2(0) = 7$$

Uppgift 4

4(a) Betrakta den linjära avbildningen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ som beskrivs av bilden nedan.



Ange standardmatrisen $\boldsymbol{A}$ för avbildningen. (3p)

Tenta Lin alg för D-programmet

Uppgift 5

Betrakta följande *matrisekvationer*.

$$AXB = C - 2XB \tag{1}$$
$$XAB = C - 2XB \tag{2}$$

där matriserna A, B och C är definierade på följande vis.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Vilken av ekvation 1 och 2 har en lösning X? Vad har denna matris för dimension i sådant fall? (3p)

(b) Lös den ekvation som har en lösning baserat på din slutsats i deluppgift (a). (3p)

Uppgift 6

(a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer. (3p)

$$x_1'(t) = 7x_1(t) + 2x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(0) = -4, \;\; x_2(0) = 3$$