SI-pass 7: Lin.alg

Hampus Ek - ekha@student.chalmers.se
Hannes Erikson - hanneeri@student.chalmers.se

6 mars 2019

1 Minsta kvadratmetoden

Bestäm den linje som, i minsta kvadratmetodens mening, bäst anpassar till punkterna: A(1,2), B(2,3), C(3,5), D(4,6), E(5,8)

2 Linjär avbildning

Låt $T : R^2 \to R^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 2e_2$ och $T(e_1 - e_2) = 5e_1$, där e_1 och e_2 är standardbasvektorerna i R^2. Bestäm matrisen för T i standardbas.

3 Godkäntdel

1. (a) Lös det linjära ekvationssystemet (använd matrisform och elementära radoperationer) (4p)

$$\begin{aligned} x + y + 3z + 2w &= 7 \\ 2x - y + 4w &= 8 \\ 3y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

(b) Beräkna determinanten till matrisen A: (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Beräkna inversen till matrisen B: (3p)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. (a) Låt (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange en bas för radrummet (Row(A)), kolonnrummet (Col(A)), nullrummet (Null(A)), samt rangen av A (rank(A)).

(b) Visa att kvadratiska formen $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$ ej är definit. (2p)

4 Utmaningar

4.1 Symmetrisk matris

6. Antag att $\mathbf{x}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ är två punkter på var sin sida om ett plan P i $\mathbb{R}^3$ och att linjen som går genom båda dessa punkter är parallell med planets normal. Då är $\bar{\mathbf{x}}$ *speglingen* av $\mathbf{x}$ i planet P om $\mathbf{x}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ också ligger på samma avstånd från planet. Om $\mathbf{x}$ ligger i planet är den sin egen spegling. (6p)

(a) Hitta speglingen $\bar{\mathbf{x}}$ av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ i planet som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

(b) Visa att matrisen $H_{\mathbf{n}} = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ är en ortogonalmatris om $\mathbf{n}$ är en normerad kolonnvektor i $\mathbb{R}^3$.

(c) Visa att om $H_{\mathbf{n}}$ är standardmatrisen för en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ så är $H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$ speglingen av $\mathbf{x}$ i planet genom origo med normalvektor $\mathbf{n}$.

4.2 Diagonalisering

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix}6 & -1 \\ -5 & 2\end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 6x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -5x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

$$x_1(0) = -3,\ x_2(0) = 7$$

Facit SI-pass 7: Lin.alg

Hampus Ek - ekha@student.chalmers.se
Hannes Erikson - hanneeri@student.chalmers.se

6 mars 2019

1 Minsta kvadratmetoden

2b) $y = \beta_1 + \beta_2 x$

$A(1,2), B(2,3), C(3,5), D(4,6), E(5,8)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}$$

$$X^T \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix}$$

$$X^T X \beta = X^T \bar{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x}$$

2c) Ortogonal komplement ($W^{\perp}$) är mängden av alla vektorer x i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W.

$$W^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0, \forall w \in W \}$$

2 Linjär avbildning

(d) Vi söker T:s standardmatris $A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}$. Det gäller att $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ och $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$. Linjariteten hos T ger således att

$$T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Därför ges T:s standardmatris A av

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Godkäntdel

TMV141 Linjär algebra Tenta: 150318

– LÖSNINGAR –

Del 1: Godkäntdelen

1. (a)

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2w = 7 \\ 2x - y \qquad + 4w = 8 \\ \quad 3y + 6z \qquad = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x &= 5 - z - 2w \\ y &= 2 - 2z \\ z &= t \\ w &= s \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t - 2s \\ 2 - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right.$$

$$+2 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right. = -2\left(2 + 0 + 4 - 4\right) + 2\left(-12 + 6 + 4\right) =$$

$$= -4 - 4 = -8$$

–1–

c) $B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $[B|I] \sim [I|C]$ $C = B^{-1}$

$R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$
$R_3 \Rightarrow R_3 + 2R_1$
$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$R_1 \Rightarrow R_1 - R_3$
$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\overset{R_2 \Rightarrow R_2 - R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$R_1 \Rightarrow -R_1$
$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. a) $P_{B \leftarrow C}$:

$[b_1\ b_2 | c_1\ c_2] \sim [I\ P_{B\leftarrow C}]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ -3 & 4 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right]$ $\underline{\underline{P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}}}$

$P_{C\leftarrow B} = P_{B\leftarrow C}^{-1} \Leftrightarrow P_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\cdot 4 - 3\cdot 6}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$ eller

$\left[\begin{array}{cc|cc} -7 & -5 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & -3 & 4 \end{array}\right] \sim$ radreducerat $[c_1\ c_2 | b_1\ b_2] \sim [I\ \cancel{B} P_{C\leftarrow B}]$

$-2-$

4. a) Reducera A till trappstegform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Icke-noll rader av trappstegform $\Rightarrow$ en bas av radrummet av A

$\mathrm{Row}\,A = \{(1,2,1,2), (0,1,1,4/3), (0,0,0,2/3)\}$

Pivot el. i kolumner 1, 2 och 4

$$\mathrm{Col}\,A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathrm{Nul}\,A \Rightarrow Ax = 0$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_3$
$x_2 = -x_3$
$x_3 = x_3$ (fri)
$x_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Nul}\,A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathrm{Rank}(A) = 3$ (A har 3 pivot el.)

b) $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -7$
A har både positiva och negativa egenvärden $\Rightarrow$ Q är EJ DEFINIT!

c) En ~~kvadratisk~~ kvadratisk matris kallas symmetrisk om $A^T = A$
En kvadratisk matris kallas ortogonal om $A^T = A^{-1}$ $(A^TA = AA^T = I)$.

4 Klurning

4.1 Symmetrisk matris

6. (a) Kryssprodukten mellan $[1,1,0]^T$ och $[-1,1,1]^T$ är $[1,-1,2]^T$, som är en normal $\mathbf{n}$ till planet. Sedan har vi formeln (se under (c))

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(b) Vi måste visa att $H^T H = I$. Observera först att

$$H^T = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I^T - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I - 2(\mathbf{n}^T)^T\mathbf{n}^T = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T = H,$$

så H är symmetrisk. Att $\mathbf{n}$ är normerad betyder att $||\mathbf{n}||^2 = \mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$. Följaktligen gäller att

$$\begin{aligned} H^T H = H^2 = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)(I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^2 = \\ = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{n})\mathbf{n}^T = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T = I, \text{ v.s.s.v.} \end{aligned}$$

(c) Ekvation (2) ovan ger formeln för spegelbilden av $\mathbf{x}$ i planet genom origo med normalvektorn $\mathbf{n}$. Detta då $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ med $\hat{\mathbf{x}}$ närmaste punkten i planet. Det gäller att vektorn $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ ligger på samma avstånd från planet, men på andra sidan, och $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ ligger alla på samma linje, parallell med $\mathbf{n}$. Alltså är $\bar{\mathbf{x}}$ speglingen av $\mathbf{x}$ i ett plan med normalvektorn $\mathbf{n}$.

När $\mathbf{n}$ är normerad är $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ så (2) förenklas till

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{n}^T\mathbf{x})\mathbf{n} = \\ = I\mathbf{x} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{x}) = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{x} = H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

4.2 Diagonalisering

3a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \quad \boxed{\lambda_2 = 7}$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda_2 = 7}$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

A är diagonaliserbar! $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{7t}$

$x_2(t) = 5c_1 e^{t} - c_2 e^{7t}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -3 \\ 5c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = \frac{2}{3} \\ c_2 = -\frac{11}{3} \end{matrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{2}{3}e^{t} - \tfrac{11}{3}e^{7t} \\ x_2(t) &= \tfrac{10}{3}e^{t} + \tfrac{11}{3}e^{7t} \end{aligned}}$$

-4