MATEMATIK **Hjälpmedel: ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 190323 kl. 14.00 - 18.00 Tentamen Telefonvakt: Sandra Eriksson Barman 5325

TMV143 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslistan och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Bonuspoäng från 2019 års duggor och SI närvaro räknas också.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng, för betyg 4 eller 5 krävs 33 respektive 42 poäng. För godkänt på kursen skall även Matlab momentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning av tenta kan ske under alla vardagar utom onsdag 9-13 i MV:s expedition.

---

1. (a) För vilka reella värden på talen g och h har ekvationssystemet (3p)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ hx_1 + x_2 + x_3 &= g \end{aligned}$$

en unik (entydlig) lösning, ingen lösning, respektive oändligt många lösningar?

(b) Bestäm matrisen X som uppfyller $P(X - A)P = B$, där (3p)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Låt $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara två tredimensionella vektorer. Visa att u och v är ortogonala mot varandra samt beräkna $\|u\|^2$, $\|v\|^2$ och $\|u + v\|^2$. (3p)

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Beräkna determinanten av A samt volymen av den parallellepiped som spänns upp av kolumnerna i A. (3p)

2. (a) Låt $B = \{b_1, b_2\}$ och $C = \{c_1, c_2\}$ där (3p)

$$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

vara två baser till $\mathbb{R}^2$. Beräkna basbytesmatriserna $P_{C \leftarrow B}$ och $P_{B \leftarrow C}$.

(b) Visa att den kvadratiska formen (3p)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

är positivt definit.

(c) Ange en ekvation till den linje som bäst anpassar, i minsta kvadratmetodens mening, punkterna (3p)

$$A = (1, 0),\ B = (2, 1),\ C = (3, 3) \text{ och } D = (4, 4).$$

3. (a) Ange definitionen av *nollrummet* till en $m \times n$ matris. (1p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Bestäm rank$(A)$, samt baser till Col$(A)$, Nul$(A)$ och Row(A). (4p)

Var god vänd!

4. (a) Definiera begreppet *eigenvektor* till en $n \times n$ matris. (1p)

(b) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -18 & 15 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$. (3p)

(c) Bestäm, med hjälp av resultatet i (b), lösningen till följande system av differentialekvationer. (2p)

$$x_1'(t) = -18x_1(t) + 15x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -20x_1(t) + 17x_2(t)$$

$$x_1(0) = 2,$$
$$x_2(0) = 1$$

5. Antag att på Chalmers finns det endast två program, data- och elektroteknik. Varje år byter 30% av data-studenterna till elektro-programmet och 10% av elektro-studenterna byter till dataprogrammet. Vi antar att den totala studentmängden på Chalmers är konstant.

(a) Bestäm migrationsmatrisen för denna Markovkedja. (1p)

(b) Antag att i år är 60% av studenterna antagna till elektronikprogrammet. Hur stor andel studenter finns det på elektronikprogrammet nästa år? (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svar måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej.

(a) Låt A vara en $m \times n$-matris. Då är det ortogonala komplementet av kolonnrummet till A lika med nollrummet till A^T. (3p)

(b) Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Om $AB = BA$ gäller även att $A^2B = BA^2$. (3p)

(c) Determinanten av en diagonaliserbar matris A är lika med produkten av egenvärdena till matrisen A. (3p)

7. Antag att matrisen A har följande egenvektorer (6p)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

med motsvarande egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$, och att vektorn

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$$

är en linjärkombination av vektorerna v_1 och v_2. Bestäm A^3x.

Lycka till!

Marija

TMV 143 Lösningar tenta 20190323

1° a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 & g \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-5h & 1+g-2h \end{array}\right]$

$h \neq 3/5$ ger en unik lösning
$h = 3/5$ och $g = 1/5$ ger oändligt många lösningar
för övriga värden på g och h har vi inga lösningar

b) $P^2 = I$, dvs $P^{-1} = P$

$X = PBP + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $u \cdot v = u^T v = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\|u\|^2 = u \cdot u = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$

$\|v\|^2 = v \cdot v = [-11\ 4\ 1]\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 138$

$\|u+v\|^2 = [-10\ 6\ 4]\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 162 \quad \left((u+v) = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$

d) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Volymen: $|\det(A)| = |-4| = 4$

2° a) $P_{C \leftarrow B} = \left[c_1\ c_2 \mid b_1\ b_2\right] = \left|\begin{array}{cc|cc} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right| \ldots = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -7 & -10 \end{bmatrix}$

$P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} -10 & -13 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix} \Rightarrow$ alla egenvärden till A är positiva $\Rightarrow$ kvadratiska formen är positivt definit.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 7/5 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{7}{5}x - \frac{3}{2}$

3° a) Mängden av alla lösningar till den homogena ekv. $Ax=0$

$Nul(A) = \{x : x \in \mathbb{R}^4 \text{ och } Ax = 0\}$

b) Radoperationerna:

$R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$, $R_2 \to \frac{1}{10}R_2$, $R_3 \to R_3 - 4R_2$

$\Rightarrow$ trappstegform: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De Nollskilda raderna utgör en bas för Row(A)

$$Row(A) = \{[1 \ 2 \ -3 \ -3], [0 \ 0 \ 1 \ 2]\}$$

Pivoterna ligger i 1:a och 3:e kolumner $\Rightarrow$ bas för Col(A)

$$Col(A) = \{[1 \ 2 \ 1]^T, [-3 \ 4 \ 1]^T\}$$

Variablerna x_2 och x_4 = fria $\Rightarrow$ $x_3 = -2x_4$, $x_1 = -2x_2 - 3x_4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Nul(A) = \{[-2 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [-3 \ 0 \ -2 \ 1]^T\}$$

Antal pivot kolumner = rank(A) $\Rightarrow$ rank(A) = 2

4° a) En nollskild vektor v, så att $T(v) = \lambda v$ (eller $Av = \lambda v$), $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Karakteristiska ekv.

$$\begin{vmatrix} -18-\lambda & 15 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-18-\lambda)(17-\lambda) - (-20)(15) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \text{ och } \underline{\underline{\lambda_2 = -3}}$$

$\lambda_1 = 2$: $\begin{bmatrix} -20 & 15 \\ -20 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -3$: $\begin{bmatrix} -15 & 15 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1(0) = 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \\ x_2(0) = 4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = 3c_1 + c_2 \\ 1 = 4c_1 + c_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 5 \end{matrix}$$

$x_1(t) = -3e^{2t} + 5e^{-3t}$ $\quad$ $x_2(t) = -4e^{2t} + 5e^{-3t}$

5°

a) $P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$

b) Tillståndsvektor för 2018 är $[0.6 \ 0.4]^T$, för nästa år:

$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.34 \end{bmatrix}$, dvs. 66% är på elektroprogrammet.

6°

a) Sedan, ~~[illegible]~~ ortogonala komplementet av radrummet av A^T är nullrummet av A^T, då är $(Col(A))^\perp = Nul\,A^T$

(S) $(Row\,A^T) = Col(A)$

b) $A/AB = A/BA \iff A^{2}AB = A \cdot B \cdot A \iff A^2B = (AB)A \iff AB = BA$

~~[illegible]~~

(S) $\iff A^2B = (BA)A \iff A^2B = BAA \iff \underline{\underline{A^2B = BA^2}}$

c) $\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \overbrace{\det P \det D \det P^{-1}}^{1} = \det D$

(S) $\det D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_4 = \prod_{i=1}^{4} \lambda_i$

7°

$x = a v_1 + b v_2 \iff \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 10 \\ b = 3 \end{matrix}$

$\Rightarrow x = 10 v_1 + 3 v_2$

$A^3 \cdot x = A^3(10 v_1 + 3 v_2) = 10 \underbrace{A^3 v_1}_{\lambda_1^3 v_1} + 3 \underbrace{A^3 v_2}_{\lambda_2^3 v_2} = 10 \lambda_1^3 v_1 + 3 \lambda_2^3 v_2 =$

$= 10 \cdot 2^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1)^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 80 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 77 \\ -6 \end{bmatrix}$

$A^3 \cdot x = \begin{bmatrix} 80 \\ 77 \\ -6 \end{bmatrix}$

$(Av = \lambda v \ ; \ A^4 v = \lambda^4 v)$