Tentamen
TMV141 Linjär algebra E

2012-01-12 kl. 08.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Lös för X matrisekvationen (3p)

$$AXB = C + AX,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm 3×3-matrisen A som satisfierar $A\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i,\ i = 1, 2, 3$, där (3p)

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{[1\ 0\ 0]^T, [-1\ 1\ 2]^T, [-2\ 1\ 3]^T\}$$

och

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \{[1\ 1\ 1]^T, [-1\ 2\ 1]^T, [2\ \ -1\ 4]^T\}.$$

3. (a) Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådan att $A = PDP^{-1}$, där (5p)

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Skriv ner den kvadratiska formen $Q(x, y)$ vars matris är A ovan, och ange huruvida f är positivt definit, negativt definit eller indefinit. (1p)

4. (a) Förklara vad som menas med att säga att vektorerna $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ utgör en *ortonormerad bas* för ett underrum U i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(Obs! Du ska förklara båda orden !).

(b) Bestäm en ortonormerad bas för underrummet U i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna (4p)

$$\mathbf{v}_1 = [1\ 2\ 0\ 3]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [4\ 0\ 5\ 8]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [8\ 1\ 5\ 6]^T.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ vara en bas för ett 2-dimensionellt vektorrum V. Bevisa att $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ utgör också en bas för V, där $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. (3p)

(b) För vilket värde av $a \in \mathbb{R}$ utgör INTE de tre polynomen $f(x) = x^2 + ax - 1$, $g(x) = x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x + 2$ en bas för $\mathbb{P}_2$? (3p)

6. (a) Bestäm matrisen för spegling i planet $6x + 3y - 2z = 0$. (4p)

(b) Bestäm spegelbilden av punkten $(2, 3, 4)$ i planet $6x + 3y - 2z = 1$. (2p)

7. (a) 3×3-matrisen A har följande egenvärden och egenvektorer : (3p)

$$\lambda_1 = 10, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer för matrisen $B = XAX^{-1}$, där

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

(b) Bevisa att egenvektorer tillhörande olika egenvärden till en symmetrisk matris A är ortogonala. (3p)

Lycka till!
Carl-Henrik Fant

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 2012-01-12	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm determinanten av matrisen AB där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ avbildar $[1\ 0]^T$ på $[2\ 3]^T$ och avbildar $[1\ 1]^T$ på $[3\ -2]^T$. Ange standardmatrisen för T. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt (3p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basbytematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, samt koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$, där $\mathbf{x} = [7\ 11]^T$.

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Bestäm rangen av, samt baser till rad-, kolonn- och nollrummen till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den linje som, i minstakvadratmetodens mening, bäst anpassar till punkterna (3p)

$$(1,1),\ (2,4),\ (3,2),\ (4,4).$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV141, Linjär Algebra E, 120112

1. (a) Utveckling efter andra kolonnen ger

$$\det(A) = -(-3)(1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) = -21.$$

Vidare är $\det(B) = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ och därmed

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -21 \cdot 24 = -504.$$

(b) $T([0\ 1]^T) = T([1\ 1]^T) - T([1\ 0]^T) = [3\ \ -2]^T - [2\ 3]^T = [1\ \ -5]^T$. Vi kan sedan direkt skriva upp matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

(c) Basbytesmatrisen är

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Den sökta koordinatvektorn är

$$\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(d) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det följer att $[1\ -1\ 3]^T$, $[2\ -1\ 4]^T$ är en bas för kolonnrummet. En bas för radrummet är $[1\ 2\ 3\ 4]^T$, $[0\ 1\ \ -1\ \ -2]^T$. Rangen är 2.

(e) Insättning av de givna punkterna i linjens ekvation $y = ax + b$ ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande normalekvationer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

är efter förenkling

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 11 \end{bmatrix},$$

vilket har lösningen $a = 7/10$, $b = 1$. Den sökta linjen är alltså $y = 7x/10 + 1$.

2. (a) Ekvationen kan skrivas $AX(B - I) = C$. Förutsatt att inverserna existerar är då $X = A^{-1}C(B - I)^{-1}$. En räkning ger nu

$$X = \begin{bmatrix} 19 & -28 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har $A = WV^{-1}$, där $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$, $W = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3]$. Vi finner efter en räkning

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Anmärkning: Man kan förenkla räkningarna genom att använda att $[V^T|W^T] \sim [I|(V^T)^{-1}W^T] = [I|A^T]$. Första likheten är övning 2.2.12 i boken (se även avsnitt 4.7), och andra likheten följer av kända räknelagar. Upprepade radoperationer ger nu

$$[V^T|W^T] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right],$$

där vi kan läsa av matrisen A.

3. (a) Karakteristiska ekvationen $(-6-\lambda)(1-\lambda)-12^2 = 0$ har lösningarna $\lambda = 10$, $\lambda = -15$. Ekvationen $A\mathbf{x} = 10\mathbf{x}$ har lösningen $\mathbf{x} = t[3\ 4]^T$ medan ekvationen $A\mathbf{x} = -15\mathbf{x}$ har lösningen $\mathbf{x} = t[-4\ 3]^T$. Alltså kan vi ta

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}.$$

(b) Egenvärdena till A^5 är 10^5 och -15^5.

4. (a) Se kursboken.

(b) Vi använder Gram–Schmidts metod. Vi sätter alltså

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Normaliserar vi dessa vektorer får vi den ortonormerade basen

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Genom att införa koordinatsystemet $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ kan vi identifiera V med $\mathbf{R}^2$. Frågan är nu om $[1\ 1]^T$ och $[1 - 1]^T$ bildar en bas för $\mathbf{R}^2$. Svaret är ja eftersom de båda vektorerna inte är parallella.

(b) Genom att införa koordinatsystemet $1, x, x^2$ kan vi identifiera rummet med $\mathbf{R}^3$. Frågan är nu om $[-1\ a\ 1]^T$, $[3\ 1\ 0]^T$, $[2\ 3\ 1]^T$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$. Vi kan nu exempelvis beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3a,$$

vilket är 0 endast för $a = 2$. Svaret på frågan är alltså $a = 2$.

6. (a) Projektionen på planets normal är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Speglingen är därmed (rita bild!)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 2\frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -23 & -36 & 24 \\ -36 & -31 & 12 \\ 24 & 12 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Svaret ges alltså av matrisen i högerledet (inklusive faktorn 1/49).

(b) Spegelbilden av $P = (2, 3, 4)$ ges av $Q = (2, 3, 4) + t(6, 3, -2)$ för något t. Värdet på t kan bestämmas av villkoret att mittpunkten mellan P och Q ligger på planet, dvs att $(6, 3, -2) \cdot (P + Q)/2 = 1$. Om vi löser denna ekvation för t får vi

$$t = \frac{2(1 - (6, 3, -2) \cdot (2, 3, 4))}{(6, 3, -2) \cdot (6, 3, -2)} = -\frac{24}{49},$$

vilket ger

$$Q = (2, 3, 4) - \frac{24}{49}(6, 3, -2) = \frac{1}{49}(-46, 75, 244).$$

7. (a) Om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ och $\mathbf{w} = X\mathbf{v}$ så är

$$B\mathbf{w} = XAX^{-1}X\mathbf{v} = XA\mathbf{v} = \lambda X\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}.$$

Detta visar att B har samma egenvärden som A och att B:s egenvektorer fås genom att multiplicera A:s egenvektorer med X från vänster. Vi beräknar nu

$$X\,[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 1 & 8 \\ 39 & 1 & 11 \\ 56 & 1 & 14 \end{bmatrix}.$$

Kolonnerna i matrisen till höger är alltså egenvektorer till B (skall man vara riktigt noga är varje multipel av första kolonnen och varje linjärkombination av de två andra kolonnerna egenvektorer) med respektive egenvärden 10, 1, 1.

(b) Se kursboken.

MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 120307 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Magnus Önnheim
0703 088 304

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från Maple T.A. 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 120308. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Ett granskningstillfälle kommer att anordnas, se information på kursens webbsida. Därefter kan tentorna granskas vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med $W^\perp$ för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$. (1p)

(b) Låt W vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Verifiera att vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger i $W^\perp$. (1p)

(c) Bestäm en ortogonal bas för W. (2p)

(d) Beräkna ortogonala projektionerna av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ på W och $W^\perp$. (2p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

(c) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$. Gör ett variabelbyte $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ som överför Q till en kvadratisk form av typen $cy_1^2 + dy_2^2$. Ange U, c och d. (2p)

4. (a) Definiera begreppet *koordinater* för en vektor relativt en bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Visa att $\mathcal{B} = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är en bas för $\mathbb{R}^3$, där (4p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

och ange koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunna leda, till målet.

5. Följande deluppgifter, som maximalt kan ge 2p per deluppgift, skall besvaras med Sant eller Falskt. Svarar du Sant, ge en tydlig motivering. Svarar du Falskt, ge ett motexempel. Enbart svar ger inga poäng.

(a) Om T är en injektiv linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, så är $n \leq m$.

(b) Om A är radekvivalent med enhetsmatrisen så är A diagonaliserbar.

(c) Om P är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och $T(\mathbf{x})$ betecknar spegelbilden av vektorn $\mathbf{x}$ i P, så är standardmatrisen för avbildningen T diagonaliserbar.

6. (a) Visa att Bernsteinpolynomen (3p)

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3(t) = t^3$$

bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 3.

(b) Bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = t^2 + 1$ i den basen. (3p)

7. (a) Visa att för varje matris A är $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(A^T A)$. (3p)

(b) Visa, till exempel med hjälp av resultatet i (a), att $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^T)$. (3p)
Du får alltså använda resultatet i del (a) även om du inte gjort del (a).

Lycka till!
Roger

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 120307	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Ange standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Ange en bas för $\mathrm{Col}(A)$ och en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den räta linje $y = a + bx$ som är bäst anpassad, i minstakvadrat-metodens mening, till punkterna $(x, y) = (1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMA141, Linjär Algebra E, 120307

1. (a) Vi gör först radoperationer, och utvecklar sedan efter rader:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

(b) Vi kan direkt skriva upp avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har då

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså bildar pivotkolonnerna $[1\ 1\ 2]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$ en bas för kolonnrummet och $[-2\ \ -2\ 1\ 0]^T$, $[-1\ 1\ 0\ 1]^T$ en bas för nollrummet.

(e) Insättning av punkterna i linjens ekvation ger

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 1 \\ a + 3b = 1. \end{cases}$$

Normalekvationerna för detta system är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Detta har lösningen $a = -1/3$, $b = 1/2$, så den sökta linjen är

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{x}{2}.$$

2. (a) Se kursboken.

(b) Låt $\mathbf{u}_1 = [1\ \ -1\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2\ \ -3\ 1\ \ -1]$, $\mathbf{x} = [1\ 1\ 0\ \ -1]^T$. Det räcker att kontrollera att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

(c) Med Gram–Schmidts metod sätter vi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en ortogonal bas för W.

(d) Ortogonala projektionen på W ges av

$$\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonal projektionen på $W^\perp$ är då

$$\mathbf{y} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ har rötterna $\lambda = \pm 5$, som alltså är matrisens egenvärden. Ekvationen $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ har lösningarna $c[2\ 1]^T$, ekvationen $A\mathbf{x} = -5\mathbf{x}$ lösningarna $c[1\ \ -2]^T$. Dessa vektorer, med $c \neq 0$ är matrisens egenvektorer.

(b) Vi kan ta $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (kolonnerna är egenvektorer med längd 1) och $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) Vi kan ta $U = P$ med P som ovan, $c = 5$ och $d = -5$.

4. (a) Se kursboken.

(b) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Eftersom koefficientmatrisen reduceras till enhetsmatrisen är de givna vektorerna en bas. I högerledet läser vi av koordinaterna $[-1\ 2\ \ -1]^T$.

5. (a) **Lösning 1:** Detta är Sant. Att T är injektiv är ekvivalent med att avbildningsmatrisen för T (som är en $m \times n$-matris) har pivotelement i varje kolonn. Men eftersom dessa n pivotelement ligger i olika rader måste $m \geq n$.

Lösning 2: Låt $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2, ...,\ \mathbf{u}_n\}$ vara en linjärt oberoende mängd i $\mathbb{R}^n$, t. ex. en bas. Då är $\{T(\mathbf{u}_1),\ T(\mathbf{u}_2), ...,\ T(\mathbf{u}_n)\}$ en linjärt oberoende mängd i $\mathbb{R}^m$, för

$$\mathbf{0} = c_1T(\mathbf{u}_1) + c_2T(\mathbf{u}_2) + ... + c_nT(\mathbf{u}_n) = T(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_n\mathbf{u}_n) \Rightarrow c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + ... + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, då $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom varje mängd med fler än m element i $\mathbb{R}^m$ är linjärt beroende, är $n \leq m$.

(b) Detta är Falskt. Ett motexempel ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) **Lösning 1:** Detta är Sant. Tag två icke-parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i P samt en normalvektor $\mathbf{w}$ till P. Dessa är linjärt oberoende, och alltså en bas för $\mathbf{R}^3$. Vidare är $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ och $T(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$, så $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är egenvektorer. Det finns alltså en bas för hela rummet bestående av egenvektorer, vilket är definitionen av att vara diagonaliserbar.

Lösning 2: Om $\mathbf{n} = [n_1\ n_2\ n_3]^T$ är en enhetsnormal till planet är $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. För standardbasen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ för $\mathbf{R}^3$ är $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} = n_i,\ i = 1, 2, 3$, så standardmatrisen A för T är

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ T(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{e}_1 - 2n_1\mathbf{n}\ \mathbf{e}_2 - 2n_2\mathbf{n}\ \mathbf{e}_3 - 2n_3\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 \end{bmatrix}.$$

Då A är symmetrisk, är A t. o.m. ortogonalt diagonaliserbar.

6. **Lösning 1:** Genom att införa basen $1, t, t^2, t^3$ kan vi identifiera rummet av polynom med $\mathbb{R}^4$. Bernsteinpolynomen identifieras då med vektorerna $B_0 = [1\ \ -3\ 3\ \ -1]^T$, $B_2 = [0\ 3\ \ -6\ 3]^T$, $B_3 = [0\ 0\ 3\ \ -3]^T$, $B_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T$, och polynomet p med $[1\ 0\ 1\ 0]^T$. Vi ställer upp den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Här kan vi läsa av både att Bernsteinpolynomen bildar en bas (koefficientmatrisen är radekvivalent med enhetsmatrisen) och att de sökta koordinaterna är $[1\ 1\ 4/3\ 2]^T$.

Lösning 2: Om vi vill skriva ett polynom p som linjärkombination av Bernsteinpolynomen får vi

$$p(t) = A(1-t)^3 + 3Bt(1-t)^2 + 3Ct^2(1-t) + Dt^3.$$

Sätter vi här $t = s/(s+1)$ får vi efter förenkling

$$(s+1)^3 p\left(\frac{s}{s+1}\right) = A + 3Bs + 3Cs^2 + Ds^3.$$

Om p har grad högst 3 så är $(s+1)^3 p(s/(s+1))$ ett polynom i s av grad högst 3, så koefficienterna existerar entydigt. Detta visar att Bernsteinpolynomen bildar en bas. I specialfallet $p(t) = 1 + t^2$ får vi

$$(s+1)^3 + (s+1)s^2 = 1 + 3s + 4s^2 + 2s^3$$

och kan läsa av koordinaterna $[A\ B\ C\ D] = [1\ 1\ 4/3\ 2]$.

Lösning 3: Om vi vill skriva ett polynom p som linjärkombination av Bernsteinpolynomen får vi

$$p(t) = c_0B_0(t) + c_1B_1(t) + c_2B_2(t) + c_3B_3(t) = c_0(1-t)^3 + 3c_1t(1-t)^2 + 3c_2t^2(1-t) + c_3t^3 =$$

$$c_0(1 - 3t + 3t^2 - t^3) + c_1(3t - 6t^2 + 3t^3) + c_2(3t^2 - 3t^3) + c_3t^3 =$$

$$c_0 + (-3c_0 + 3c_1)t + (3c_0 - 6c_1 + 3c_2)t^2 + (-c_0 + 3c_1 - 3c_2 + c_3)t^3.$$

Om p är nollpolynomet, följer $c_0 = 0$, $3c_0 - 3c_1 = 0$, $3c_0 - 6c_1 + 3c_2 = 0$, $-c_0 + 3c_1 - 3c_2 + c_3 = 0$, med lösningen (framåtsubstitution) $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, vilket medför att de 4 polynomen är linjärt oberoende, och därmed en bas. Om $p(t) = 1 + t^2$ följer $c_0 = 1$, $3c_0 - 3c_1 = 0$, $3c_0 - 6c_1 + 3c_2 = 1$, $-c0 + 3c_1 - 3c_2 + c_3 = 0$, med lösningen $c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 4/3,\ c_3 = 2$, vilket ger polynomets koordinater i den basen.

7. (a) Det gäller att visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Implikationen åt höger följer genom att multiplicera med A^T. Implikationen åt vänster inses till exempel genom att skriva

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}.$$

Om $A^T A\mathbf{x} = 0$ är alltså $\|A\mathbf{x}\|^2 = 0$, vilket medför $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) **Lösning 1:** Enligt (a) gäller $\mathrm{Nul}(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A^T A)^\perp$. Detta kan skrivas $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Col}((A^T A)^T) = \mathrm{Col}(A^T A)$. Kalla nu A för A^T och vi är klara.

Lösning 2: Om $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(AA^T)$ finns det ett $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ så att $\mathbf{y} = (AA^T)\mathbf{x} = A(A^T\mathbf{x})$, så $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(A)$, dvs. $\mathrm{Col}(AA^T)$ är ett underrum av $\mathrm{Col}(A)$. Därför räcker att visa att de båda rummen har samma dimension. Vi har

$$dim\,\mathrm{Col}(A) + dim\,\mathrm{Nul}(A) = n \text{ och } dim\,\mathrm{Col}(A^T A) + dim\,\mathrm{Nul}(A^T A) = n$$

så från (a) följer att $dim\,\mathrm{Col}(A) = dim\,\mathrm{Col}(A^T A)$. Använder vi detta på A^T får vi

$$dim\,\mathrm{Col}(AA^T) = dim\,\mathrm{Col}(A^T) = dim\,\mathrm{Row}(A) = dim\,\mathrm{Col}(A).$$

MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 130313 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Christoffer Standar
0703-088304

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 13/3 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -10x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

3. (a) Definiera vad som menas med *nollrummet* till en $m \times n$ matris A. (1p)

(b) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Bestäm vilken eller vilka av dessa tre vektorer som tillhör $\mathrm{Col}(A)$ respektive $\mathrm{Nul}(A)$.

(c) Bestäm en bas för $\mathrm{Col}(A)$ samt en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & a \end{bmatrix}^T.$$

(a) För vilket eller vilka $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ linjärt beroende ? (3p)

(b) Bestäm en ortogonalbas för det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om $AB\mathbf{x} = 0$ har icke-trivial lösning $\mathbf{x}$ så har $A\mathbf{x} = 0$ och $B\mathbf{x} = 0$ båda icke-trivial lösning. Med icke-trivial lösning $\mathbf{x}$ menas att $\mathbf{x} \neq 0$.

(b) Om A är diagonaliserbar så är $I - A^2$ diagonaliserbar, där I är enhetsmatrisen.

(c) Om A är en kvadratisk matris och $A^2 = 0$ så är $I - A$ en inverterbar matris.

6. Antag att $\mathbf{x}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ är två punkter på var sin sida om ett plan P i $\mathbb{R}^3$ och att linjen som går genom båda dessa punkter är parallell med planets normal. Då är $\bar{\mathbf{x}}$ *speglingen* av $\mathbf{x}$ i planet P om $\mathbf{x}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ också ligger på samma avstånd från planet. Om $\mathbf{x}$ ligger i planet är den sin egen spegling. (6p)

(a) Hitta speglingen $\bar{\mathbf{x}}$ av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ i planet som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

(b) Visa att matrisen $H_{\mathbf{n}} = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ är en ortogonalmatris om $\mathbf{n}$ är en normerad kolonnvektor i $\mathbb{R}^3$.

(c) Visa att om $H_{\mathbf{n}}$ är standardmatrisen för en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ så är $H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$ speglingen av $\mathbf{x}$ i planet genom origo med normalvektor $\mathbf{n}$.

7. (a) Visa att de tre polynomen $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - 1$, $p_3(t) = (t-1)(t-2)$ bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 2 ($\mathbb{P}_2$). (6p)

(b) Man vill i ett experiment hitta det andragradspolynom $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ som stämmer bäst överens med mätdata $(t_i, y_i), 1 = 1, 2, \ldots, n$ i minstakvadratmening. Man vet av erfarenhet att en modell där man försöker hitta koordinatvektorn för standardbasen $\{1, t, t^2\}$ resulterar i en illa-konditionerad matris (en matris med högt konditionstal) i normalekvationerna för den typ av mätdata man har. Istället vill man hitta $\mathbf{d} = \begin{bmatrix}d_1 & d_2 & d_3\end{bmatrix}^T$ sådan att $r(t) = d_1 p_1(t) + d_2 p_2(t) + d_3 p_3(t)$ med $\{p_1, p_2, p_3\}$ som i uppgift 7a så att r är det andragradspolynom som passar mätdata bäst i minstakvadratmening.

Förfärdiga Matlabprogrammet på följande sida så att det tar emot en kolonnvektor $\mathbf{t}$ med mättider och en vektor $\mathbf{y}$ med mätdata där y_i är mätdata vid tiden t_i, ställer upp designmatrisen A för motsvarande i allmänhet överbestämda system $A\mathbf{d} = \mathbf{y}$ och sedan beräknar koefficientmatrisen och högerledet för normalekvationen för problemet samt löser detta. Programmet skall returnera minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{d}}$ samt projektionen $\hat{\mathbf{y}}$ av mätdata $\mathbf{y}$ på A:s kolonnrum.

Svara genom att skriva vilket eller vilka kommandon du bör ersätta de tre punkterna under varje steg med!

Lycka till!
Fredrik L

Var god vänd!

Programskal till uppgift 7b:

```
function [dhat,yhat]=lsq_p2(t,y)
N=size(t,1);
if length(t)>N
   error('t and y must column vectors')
end
if N~=size(y,1)
   error('t and y must be of same size')
end

p1=@(s)ones(size(s));
p2=@(s)s-1;
p3=@(s)(s-1).*(s-2);
% Konstruera A:
A=size(N,3);  % Möjligen överflödigt!
% Steg 1:

...

% Beräkna normalekvationens koefficientmatris och högerled:
%Steg 2:

...


%Lös normalekvationen:
%Steg 3:

...

%Beräkna yhat:
%Steg 4:

...
```

Var god vänd!

Var god vänd!

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 130313	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Hitta LU-faktoriseringen av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

utan att utföra några radbyten.

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten till matrisen A ovan utan att använda kofaktorexpansion. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ där (2p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^3$. Beräkna basbytesmatrisen $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. Använd eventuellt resultatet från föregående uppgift.

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(f) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix}^T$ och $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}^T$ där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^n$. Förfärdiga följande program så att det tar emot ett tal ϕ och en kolonnvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ och beräknar och returnerar $y = T(\mathbf{x})$ genom att först räkna ut T:s standardmatris. (2p)

Lösning:

```
function y=T(x,phi)

if size(x,1)~=3 | size(x,2)~=1
   error('size(x) must be [3 1]!')
end
```

....

Lösningar TMV141, Linjär Algebra E, 130313

1. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U.$$

Faktorn L fås av att ta de grå ”kolonnerna” i varje matris i relationerna ovan och var för sig dela dem med det översta elementet och sätta resultatet på motsvarande plats i L varvid

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

erhålls.

(b) Eftersom radoperationerna utförda på A ovan inte förändrar determinanten så gäller att $\det(A) = \det(U) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$ då determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

Ett alternativt sätt att se detta är att beräkna $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot (-8)$.

Utan någon av dessa insikter får man väsentligen räkna om föregående uppgift: man utför alltså radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + 2R_3.$$

Då erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinanten i den senare är som nämnts $1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$ och ingen av radoperationerna ovan förändrar som sagt determinanten, så determinanten hos den ursprungliga matrisen är också -8.

(c) Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, \quad R_2 \leftrightarrow R_3,$$
$$R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_3, \quad R_1 \mapsto -R_1$$

förvandlar A till I_3. Då samma operationer utförs på I_3 erhåller man

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Låt $C = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3]$ och $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$. Notera att C är samma matris som i föregående uppgift. Alltså,

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = C^{-1}B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

så det normala systemet är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \end{array}\right],$$

och följaktligen är minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

(f)
```
function y=T(x,phi)

if size(x,1)~=3 | size(x,2)~=1
   error('size(x) must be [3 1]!')
end

A=[1 0 0;0 cos(phi) sin(phi);0 -sin(phi) cos(phi)];
y=A*x;
```

2. (a) Vi beräknar

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -10 & 7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Egenvärdesekvationen $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ är ekvivalent med $-4x_1 + 2x_2 = 0$, eller med $\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. På samma sätt ger $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ egenvektorerna $\mathbf{x} = \frac{1}{2}x_1 \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$.

Så vi har en diagonalisering $A = PDP^{-1}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} e^{3t}, \tag{1}$$

där

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Insättning i (1) ger

$$x_1(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}, \quad x_2(t) = 6e^{2t} - 5e^{3t}.$$

3. (a) För en $m \times n$ matris A gäller att

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

(b) Eftersom $\mathrm{Nul}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^5$ och $\mathrm{Col}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^4$ så kan vi direkt utesluta $\mathbf{v}_1$ som ett element i $\mathrm{Col}(A)$ och direkt utesluta $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ som element i $\mathrm{Nul}(A)$. Sedan för $\mathbf{v}_1$ kontrollerar man direkt att $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, så $\mathbf{v}_1$ tillhör $\mathrm{Nul}(A)$. För $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ ställer vi upp den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rr} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + 2R_3$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rr} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Eftersom systemet är konsistent för $\mathbf{v}_2$ men inte för $\mathbf{v}_3$ så drar vi slutsatsen att $\mathbf{v}_2$ tillhör $\mathrm{Col}(A)$ men inte $\mathbf{v}_3$.

(c) I trappstegsformen ovan har vi pivoter i 1:a, 2:a och 4:e kolumner. Motsvarande kolumner i A utgör alltså en bas för dess kolonnrum, dvs

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{är en bas för } \mathrm{Col}(A).$$

När det gäller nollrummet återstår bakåtsubstitution. Variablerna x_3 och x_5 är fria och vi får i tur och ordning

$$x_4 = -x_5, \quad x_2 = x_3 + 2x_5, \quad x_1 = -3x_3 - 5x_5.$$

En vektor i nollrummet skrivs i parametrisk vektorform som

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som innebär att $\{[-3, 1, 1, 0, 0]^T, [-5, 2, 0, -1, 1]^T\}$ är en bas för $\mathrm{Nul}(A)$.

4. (a) Vi ställer upp en matris med dessa fyra vektorer som dess kolumner

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & a \end{bmatrix}.$$

Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto 8R_3 + 5R_2,$$
$$R_4 \mapsto 2R_4 - R_2, \quad R_4 \mapsto 5R_4 - 3R_3$$

erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & -8 & -15 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 10a - 110 \end{bmatrix}.$$

De fyra ursprungliga vektorerna är linjärt beroende om och endast om talet i nedre högre hornet är noll, dvs om och endast om $a = 11$.

(b) Det gäller att byta ut $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ mot en ortogonalbas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ via en Gram-Schmidt process. Först tar vi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Näst tar vi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 = \cdots = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Slutligen tar vi

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 = \cdots = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Detta är Falskt, t.ex. då A och B är $n \times n$ matriser sådan att A är inverterbar men inte B.

(b) Detta är Sant. Låt $A = PDP^{-1}$ vara en diagonalisering av A. Då gäller att $I - A^2 = P(I - D^2)P^{-1}$ är en diagonalisering av $I - A^2$, ty $I - D^2$ är också en diagonalmatris.

(c) Detta är Sant. Då $A^2 = 0$ gäller $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I$, som innebär att $(I - A)^{-1} = I + A$.

6. (a) Kryssprodukten mellan $[1, 1, 0]^T$ och $[-1, 1, 1]^T$ är $[1, -1, 2]^T$, som är en normal $\mathbf{n}$ till planet. Sedan har vi formeln (se under (c))

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\right)\mathbf{n} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

(b) Vi måste visa att $H^T H = I$. Observera först att

$$H^T = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I^T - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I - 2(\mathbf{n}^T)^T\mathbf{n}^T = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T = H,$$

så H är symmetrisk. Att $\mathbf{n}$ är normerad betyder att $||\mathbf{n}||^2 = \mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$. Följaktligen gäller att

$$\begin{aligned} H^T H = H^2 = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)(I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^2 = \\ = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{n})\mathbf{n}^T = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T = I, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

(c) Ekvation (2) ovan ger formeln för spegelbilden av $\mathbf{x}$ i planet genom origo med normalvektorn $\mathbf{n}$. Detta då $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ med $\hat{\mathbf{x}}$ närmaste punkten i planet. Det gäller att vektorn $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ ligger på samma avstånd från planet, men på andra sidan, och $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ ligger alla på samma linje, parallell med $\mathbf{n}$. Alltså är $\bar{\mathbf{x}}$ speglingen av $\mathbf{x}$ i ett plan med normalvektorn $\mathbf{n}$.

När $\mathbf{n}$ är normerad är $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ så (2) förenklas till

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{n}^T\mathbf{x})\mathbf{n} = \\ = I\mathbf{x} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{x}) = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{x} = H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

7. (a) Låt $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ och låt $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ vara standardbasen för $\mathbb{P}_2$. "Bas"bytematrisen kan man skriva upp direkt,

$$P = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är uppenbarligen inverterbar, vilket medför att $\mathcal{B}$ faktiskt ÄR en bas för $\mathbb{P}_2$.
(b)

```
function [dhat,yhat]=lsq_p2(t,y)
N=length(t);
if N~=length(y)
   error('t and y must be of same size')
end

p1=@(s)ones(size(s));
p2=@(s)s-1;
p3=@(s)(s-1).*(s-2);
% Konstruera A:
A=zeros(N,3);
% Steg 1:
A=[p1(t) p2(t) p3(t)];

% Beräkna normalekvationens koefficientmatris och högerled:
%Steg 2:
ATA=A'*A;
ATy=A'*y;

%Lös normalekvationen:
%Steg 3:

dhat=ATA\ATy; %Variabeln dhat måste tilldelas detta värde!

%Beräkna yhat:
%Steg 4:

yhat=A*dhat;  %Variabeln yhat måste tilldelas detta värde!
```

MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 260813 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Christoffer Standar
0703-088304

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 26/8 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm determinanterna av var och en av matriserna A^{-1}, B och $A^{-1}B$.

(b) Ge exempel på värden för a och b som medför att systemet $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ har unik, ingen, respektive oändligt många lösningar. (3p)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Definiera vad som menas med att en $n \times n$ matris A är *inverterbar*, samt med *inversen* till en sådan matris. (1p)

(b) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$AXB = XB + C. \tag{1}$$

(c) Låt nu i stället $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sådan att $(a-1)(d-1) = bc$. Förklara varför ekvation (1) ovan inte kan ha en unik lösning i detta fall. (2p)

Var god vänd!

4. Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}4 & 6 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}5 & a & -11\end{bmatrix}^T.$$

(a) För vilket $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende ? För detta a skriv även $\mathbf{v}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. (3p)

(b) Bestäm en ON-bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ för planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Ange även koordinatvektorerna för $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ med avseende på $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (3p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om A är en 3×3 matris med egenvärdena $1, 2$ och 3, då finns det en ortogonalmatris P sådan att $P^T AP$ är en diagonalmatris.

(b) Mängden V av alla vektorer $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ där x, y, z är heltal är ett underrum i $\mathbb{R}^3$.

(c) Om A och B är $n \times n$ matriser med B inverterbar sådan att $AB = BA$, då måste även $AB^{-1} = B^{-1}A$ gälla.

6. (a) Visa att de tre polynomen $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 2 + t - t^2$, $p_3(t) = t + t^2$ bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 2 ($\mathbb{P}_2$). Ange också koordinaterna för polynomet $1 + t + t^2$ i basen $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$. (6p)

(b) Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ vara den linjära avbildning som ges av derivering, dvs $T[p(t)] = p'(t)$. Bestäm matrisen för T med avseende på basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{P}_2$ ovan och standardbasen $\mathcal{E} = \{1, t\}$ för $\mathbb{P}_1$.

7. (a) Definiera vad som menas med att en $n \times n$ matris P är en *ortogonalmatris.* (6p)

(b) Låt R vara matrisen för en 45-graders rotation kring axeln genom origo och punkten $(1, 2, 3)$ i $\mathbb{R}^3$. Ange matrisen för R på formen $R = PMP^T$, där P är en ortogonalmatris.

(OBS! Det räcker att ange P och M, du behöver inte räkna ut R).

(c) Vad är R^{48} ? Förklara ditt resonemang.

Lycka till!
Fredrik L.

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 260813	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) En 2×2 matris A har egenvärdena -1 och 2 samt tillhörande egenvektorer $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ respektive $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$. Bestäm A. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm en bas för nollrummet till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1$, där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^2$. Bestäm matrisen för T i standardbas. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den linje $y = kx + m$ som i minstakvadratmetodens mening är bäst anpassad till punkterna (3p)

$$(-1, 2), \quad (0, 3), \quad (2, 4), \quad (3, 5).$$

Lösning:

....

(f) Bestäm egenvärden och egenvektorer för matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV841, Linjär Algebra V, 130826

1. (a) Eftersom det finns två egenpar (egenvektor + egenvärde) till A så är A diagonaliserbar och vi kan skriva $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi måste finna

$$P^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Så

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi benämner den givna matrisen A och söker X så att $AX = I$. Ställ upp den utökade koefficientmatrisen

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Då man (t.ex.) utför radoperationerna

$$R_1 \leftrightarrow R_3,\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1,\ R_3 \mapsto R_3 - R_2,\ R_1 \mapsto R_1 + R_3,\ R_3 \mapsto -\frac{1}{2}R_3,\ R_2 \mapsto R_2 + R_3$$

erhålls den radekvivalenta matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det gäller alltså att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi ska hitta en bas för det underrum till $\mathbb{R}^4$ som består av alla $\mathbf{x}$ sådana att $A\mathbf{x} = 0$ där A är matrisen i uppgiften. Det gör vi genom att först hitta den radekvivalenta reducerade trappstegsformen till A. Detta kan göras genom att applicera följande sekvens av radoperationer på A:

$$R_3 \mapsto R_3 - R_1,\ R_4 \mapsto R_4 - R_2,\ R_3 \mapsto R_3 - R_2,\ R_1 \mapsto R_1 + R_2.$$

Detta ger att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att x_3 och x_4 är fria variabler och att $x1 = -2x_3 - x_4$ och $x_2 = -x_3 - 2x_4$ varvid det följer att varje vektor $\mathbf{x}$ i nollrummet kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mängden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utgör således en bas för nollrummet till A.

(d) Vi söker T:s standardmatris $A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}$. Det gäller att $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ och $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$. Linjariteten hos T ger således att

$$T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Därför ges T:s standardmatris A av

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi måste hitta minsta-kvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(Här tolkar vi alltså x_1 som k i modellen och x_2 som m, om vi byter plats på kolonnerna i A så blir tolkningen den omvända.) Vi måste lösa normalekvationerna

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Det gäller att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Således ges normalekvationernas utökade koefficientmatris av

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 & 21 \\ 4 & 14 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 14/5 \end{bmatrix}$$

så den sökta linjen utgörs av lösningarna till $y = \frac{7}{10}x + \frac{14}{5}$.

(f) Vi börjar med att hitta egenvärdena, d.v.s. alla $\lambda \in \mathbb{R}$ sådana att det finns nollskilda vektorer $\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ vilket är ekvivalent med att $(A - \lambda I)\mathbf{x}$. Vi vet att detta bara gäller om $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi har att

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda-3)(\lambda+3),$$

så vi har två distinkta egenvärden, 3 och -3. Vi behöver nu hitta icke-triviala lösningar till ekvationerna $(A-3I)\mathbf{x} = 0$ och $(A+3I)\mathbf{x} = 0$. Således räknar vi

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så en egenvektor till egenvärdet 3 är $(-2, 1)$. För egenvärdet -3 får vi

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Härav följer att vektorn $(1, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet -3.

2. (a) Vi vet att $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Det följer att $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Determinaten hos en diagonal matris är produkten av diagonalen så $\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. För att finna $\det(A)$ kan vi (i det här fallet) kanske tillåta oss kofaktorexpansion. Vi använder dock det faktum att radersättningar inte förändrar determinanten medan radbyten ändrar determinantens tecken och räknar

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= -\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -2.$$

Således är $\det(A^{-1}) = -1/2$, $\det(B) = 24$ och $\det(A^{-1}B) = -\frac{1}{2} \cdot 24 = -12$.

(b) Vi skriver upp systemets totalmatris och radreducerar till trappstegsform ($R_2 \mapsto -(R_2 - 2R_1)$, $R_3 \mapsto R_3 - R_1$, $R_3 \mapsto R_3 + 2R_2$) och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 1 & -1 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2-b \\ 0 & 0 & a-9 & 3-2b \end{bmatrix}$$

Vi ser att om $a \neq 9$ så existerar en unik lösning för varje värde på b. Om $a = 9$ så finns det oändligt många lösningar om $b = 3/2$, annars är systemet inkonsistent.

3. (a) Se boken.

(b) Addera $-XB$ till de båda leden i ekvationen och vi erhåller

$$AXB = XB + C \Leftrightarrow AXB - XB = C \Leftrightarrow (A - I)XB = C. \tag{2}$$

Det är lätt att inse att såväl matrisen $A - I$ som matrisen B är inverterbara och eftersom de är så små kan vi tillåta oss att räkna ut dessa inverser. Algebraiskt gäller det att lösningen ges av

$$X = (A - I)^{-1}CB^{-1}. \tag{3}$$

Vi har att

$$(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

så om vi sätter in dessa och den givna matrisen C i (3) så får vi att

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(Notera att för större matriser så bör man definiera en ny okänd matris $Y = XB$ och substituera i (2) och Gauss-elliminera motsvarande totalmatris $\begin{bmatrix}(A - I) & C\end{bmatrix}$. Då finner man alltså Y och kan sedan lösa $XB = Y$ genom att lösa $B^T X^T = Y^T$ medelst Gauss-eliminering av $\begin{bmatrix}B^T & Y^T\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}I & X^T\end{bmatrix}$. Dessa räkningar kan man naturligtvis också genomföra i det aktuella fallet.)

(c) Om

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

så är $\det(A - I) = (a-1)(d-1) - cb$. Att $(a-1)(d-1) = cb$ är alltså liktydigt med att $\det(A - I) = 0$ och då ger satsen om matrisers invertebarhet att den givna ekvationen ej kan ha en entydig lösning så fort man insett att ekvivalensen i (2) gäller.

4. (a) För att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ skall vara linjärt beroende måste det finnas skalärer r, s och t, där någon är nollskild, så att $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 = 0$. Vi behöver alltså avgöra för vilka värden på a som detta homogena system har icke-triviala lösningar. Följande sekvens av radoperationer:

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1,\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1,\ R_3 \mapsto -\frac{1}{7}R_3,\ R_3 \leftrightarrow R_2,\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_2$$

ger att

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a - 11 \end{bmatrix}.$$

Om $a = 11$ så ser vi att den sista kolonnen ej är en pivotkolonn, vilket är liktydigt med att den homogena ekvationen har icketriviala lösningar, vilket i vårt fall innebär att de tre vektorerna är linjärt beroende.

För att, med $a = 11$, kunna skriva $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -11 \end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ så måste vi alltså hitta x_1 och x_2 så att $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$. Men de redan genomförda räkningarna kan tolkas som framåtfasen i lösningsprocessen av detta system och vi kan avsluta med radoperationen $R_1 \mapsto R_1 - 4R_2$, d.v.s.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså att $\mathbf{v}_3 = -7\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$.

(b) Vi har att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 12$ så de båda vektorerna är ickeparallella och deras linjära hölje är alltså ett plan. För att hitta en ON-bas för detta så använder vi Gram-Schmidts process. Vi normaliserar $\mathbf{v}_1$ och väljer den resulterade vektorn om vår första basvektor, $\mathbf{u}_1$. Därefter räknar vi ut det ortogonala komplementet av $\mathbf{v}_2$:s projektion på $\mathbf{u}_1$ och normaliserar den erhållna vektorn. Resultatet är vår sökta vektor $\mathbf{u}_2$. Alltså,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

och slutligen

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

en ON-bas för

$$\operatorname{span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}).$$

Koordinatvektorerna för $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ med avseende på $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är då $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$.

5. (a) Falskt. Om $P^TAP = D$ så är $A = PDP^T$ vilket innebär att A är symmetrisk ($A^T = A$). Så om A är en triangulär matris med diagonal $1,\ 2,\ 3$ och något nollskilt element utanför diagonalen så är påståededet inte sant.

(b) Falskt ty $1/2 * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ligger ej i V.

(c) Sant. Om A och B är $n \times n$ matriser med B inverterbar gäller:

$$AB = BA \iff A = BAB^{-1} \iff B^{-1}A = AB^{-1}$$

6. (a) Vi ställer upp utökad koefficientmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{3\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

varur bakåtsubstitution ger oss kooordinatvektorn $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Vi ser också att koefficientmatrisen har full rang så $\{p_1, p_2, p_3\}$ är linjärt oberoende och alltså bas för $\mathbb{P}_2$.

(b) Matrisen för T består av basvektorernas bilder i kolonnerna. Vi har $T[p_1] = 2t$, $T[p_2] = 1 - 2t$ och $T[p_3] = 1 + 2t$, vilket ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

7. (a) Se kurslitt.

(b) Välj en vektor, ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, till exempel $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Välj sedan en vektor, ortogonal mot både $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, till exempel genom att radreducera

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

vilket till exempel ger lösningen $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{u} = 1/\sqrt{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{w} = 1/\sqrt{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = 1/\sqrt{70}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}^T$. Då bildar $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en ON-bas.

I denna bas ges en vridning 45 grader av

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1/\sqrt{2} = \cos(45^\circ) = \sin(45^\circ))$$

där kolonnerna är basvektorernas positioner efter rotationen.

Rotationen R ges i standardbasen av

$$\mathbf{x} \mapsto P^{-1}\mathbf{x} \mapsto MP^{-1}\mathbf{x} \mapsto PMP^{-1}\mathbf{x} = R\mathbf{x},$$

dvs $R = PMP^{-1} = PMP^T$, där $P = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ är en ortogonalmatris.

(c) $R^{48} = PM^{48}P^T = P(M^8)^6P^T = PI^6P^T = PP^T = I$, ty P är ortogonal. Man kan också se det geometriskt; R^8 roterar ett helt varv ($45^\circ = 1/8$-varv), dvs $R^8 = I$ och därmed också $R^{48} = I$ ty 6 varv.

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 140116 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg
0703-088304

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida i eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.
Granskningstillfälle meddelas på kurshemsidan.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

(b) Bestäm en bas för $\operatorname{Nul} A$. (2p)

(c) Ange $\operatorname{rank} A$ och $\dim \operatorname{Nul} A$. (1p)

3. Låt $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{t} \neq 0$. Förklara varför $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ *inte* är en linjär avbildning. (2p)

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till A (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till A. (2p)

(c) Är A diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera A. (2p)

Var god vänd!

5. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Bestäm det andragradspolynom $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ som är bäst anpassat till punkterna $(-1, 0), (0, -2), (1, -2), (2, 2)$ enligt minstakvadratmetoden. (4p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^t$ i $\mathbb{R}^2$, och låt $L = \text{span}\{\mathbf{v}\}$ vara linjen som spänns upp av $\mathbf{v}$.

(a) Ta fram projektionen av vektorerna $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t$ på linjen L. (2p)

(b) Om $\mathbf{p}$ är projektionen av en vektor $\mathbf{w}$ på L, så ges speglingen $\mathbf{s}$ av $\mathbf{w}$ kring L av $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$. Ta fram speglingen av vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ kring linjen L. (1p)

(c) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som först speglar en vektor kring linjen L och sedan speglar kring x-axeln. Ta fram standardmatrisen för avbildningen T. (2p)

(d) Avbildningen T ovan kan beskrivas som en rotation. Vad är rotationsvinkeln? (2p)

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, och B är inverterbar, så är $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(b) En 3×3 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

(c) En 3×2 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

8. (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer är en ortogonal mängd och en ortonormal mängd. (2p)

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd, så är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ linjärt oberoende. (3p)

Lycka till!
Fredrik L

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 140116	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm för vilka h som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \end{bmatrix}^t$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Skriv den allmänna lösningen till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}^t$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ vara baserna $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^t\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\} = \{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t\}$ för $\mathbb{R}^2$. Antag att $\mathbf{v}$ har koordinaterna $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^t$ i basen $\mathcal{B}$. Bestäm koordinaterna $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}}$ för $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{C}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $(2A + X)B^{-1} = I_2$ där I_2 är 2×2-enhetsmatrisen.

Lösning:

....

(f) Låt $W = \text{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\end{bmatrix}^t$. Ligger vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}^t$ i W? (2p)

Lösning:

Svar: ....

TMV141 Linjär algebra E
Lösningar

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$ är en lösbar vektorekvation. Totalmatrisen för vektorekvationen blir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix},$$

och det svarar mot ett lösbar ekvationssystem om och endast om $h - 5 = 0$, dvs, om och endast om $h = 5$.

SVAR: $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om $h = 5$.

(b) Totalmatrisen som svarar mot ekvationssystemet är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är i trappstegsform, och andra kolonnen är då den enda kolonnen som inte är en pivotkolonn, och svarar alltså då mot en fria variabel, som vi kan kalla för t.

Vi får då att allmänna lösningen blir:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

SVAR: Allmänna lösningen är: $x_1 = 10 - 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

(c) Volymen av parallellepipeden som spänns upp av $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ ges av $\det(A)$ där $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$.

Eftersom att dra ifrån två gånger tredje raden från den andra raden inte påverkar determinanten, så får vi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling längs första kolonnen } \}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (5 - 12) = -35.$$

SVAR: Volymen är $|\det(A)| = 35$.

(d) Vi får med hjälp av basbytesmatriser att

$$\mathbf{v} = P_B(\mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sedan uppfyller $(\mathbf{v})_C$ att $P_C(\mathbf{v})_C = \mathbf{v}$, och motsvarande totalmatris är:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

så $(\mathbf{v})_C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}^t$.

Svar:

$$(\mathbf{v})_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(e) Multiplicerar vi ekvationen med B från höger, så får vi

$$2A + X = B$$

och drar vi ifrån $2A$ får vi då:

$$X = B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svar:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(f) u ligger i $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ om och endast om u är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, vilket den är om och endast om vektorekvationen $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$ är lösbar. Totalmatrisen för vektorekvationen är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Totalmatrisen svarar då mot ett icke lösbart ekvationssystem (eftersom sista raden svarar mot $0 = 4$), så $\mathbf{u}$ ligger inte i W.

Svar: $\mathbf{u}$ ligger inte i W

2. Vi börjar med att ta fram reducerade trappstegsformen för A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Eftersom 1:a, 2:a och 5:e kolonnerna är pivotkolonner, så bildar motsvarande kolonner i A en bas för $\operatorname{Col} A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\operatorname{Col} A$.

(b) Från trappstegsformen ovan, så ser man att x_3 och x_4 blir fria variabler (säg, s och t) i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och att den allmänna lösningen till ekvationen är:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9s + 3t \\ 5s - 7t \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enligt metoden för att ta fram en bas för $\operatorname{Nul} A$, blir då vektorerna som står efter s och t en bas för $\operatorname{Nul} A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\operatorname{Nul} A$.

(c) Vi ser från (a) och (b) att $\operatorname{Col} A$ respektive $\operatorname{Nul} A$ har baser som består av 3 respektive 2 element, så $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 3$ och $\dim \operatorname{Nul} A = 2$.

SVAR: $\operatorname{rank} A = 3$ och $\dim \operatorname{Nul} A = 2$.

3. Ett sätt att se det är att en linjär avbildning S skall uppfylla att $S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, eftersom $S(\mathbf{0}) = S(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, medan T uppfyller $T(\mathbf{0}) = \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$.

Att T inte är linjär kan också ses mer direkt, t.ex.

$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{t} \neq \mathbf{x}+\mathbf{t}+\mathbf{y}+\mathbf{t} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),$$

eller om $c \neq 1$,

$$T(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x}+\mathbf{t} \neq c(\mathbf{x}+\mathbf{t}) = cT(\mathbf{x}).$$

4. (a) Det karakteristiska polynomet p är:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -9 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{ utveckling längs 3:e raden }\} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

Egenvärdena är rötterna till det karakteristiska polynomet, dvs, $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$.

SVAR: Egenvärdena till A är 1 och 2.

(b) Vi får fram egenvektorer till ett egenvärde λ genom att bestämma $\text{Nul}(A - \lambda I)$. För $\lambda = 1$ får vi:

$$\begin{bmatrix}(A-I) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom andra kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara $3t$) i ekvationen $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

För $\lambda = 2$ får vi:

$$\begin{bmatrix}(A-2I) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & \\ -9 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Eftersom tredje kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara t) i ekvationen $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SVAR: Egenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 1$ är alla vektorer

$$t\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, \quad t \neq 0,$$

och egenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 2$ är alla vektorer

$$t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

(c) Enligt (b), så kan man bara hitta två linjärt oberoende egenvektorer till A (valfri nollskild multipel av $\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix}^t$, och valfri nollskild multipel av $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^t$), men för att A skall vara diagonaliserbar skall det finnas tre stycken linjärt oberoende egenvektorer, så A är alltså inte diagonaliserbar.

SVAR: A är inte diagonaliserbar.

5. (a) Om A är en $m \times n$-matris, och $b \in \mathbb{R}^m$, så är en *minstakvadratlösning* till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|| \leq ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) För att anpassa andragradspolynomet $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ i punkterna $-1, 0, 1$ och 2 till värdena $0, -2, -2$ och 2, så bildar man matrisen

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

och vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det andragradspolynom som är bäst anpassat till värdena är då det polynomet med koefficienter β_0, β_1, β_2 där $\beta = \begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}^t$ är en minstakvadratlösning till $X\beta = \mathbf{y}$. Minstakvadatlösningarna till $X\beta = \mathbf{y}$ ges av lösningarna till normalekvationen $X^t X\beta = X^t\mathbf{y}$. Vi får att

$$X^t X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

och

$$X^t\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Så totalmatrisen för minstakvadratlösningen blir:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -50/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -23/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix}$$

Alltså blir minstakvadratlösningen $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -23/10 & -9/10 & 15/10 \end{bmatrix}^t$.

Svar: Andragradspolynomet som är bäst anpassat till värdena enligt minstakvadratmetoden är $p(x) = -23/10 - (9/10)x + (15/10)x^2$.

Del 2: Överbetygsdelen

6. (a) Projektionen $\mathbf{p}$ av en vektor $\mathbf{w}$ på linjen L som spänns upp av $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Vi får då att projektionerna blir:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}+0}{3+1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{0+1}{3+1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Svar: Projektionerna $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$ av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på L är:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

(b) Speglingarna blir enligt formeln $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$:

$$\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{s}_2 = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\mathbf{e}_1$ speglas till $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{e}_2$ speglas till $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t$.

(c) Standardmatrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är matrisen

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}.$$

Vi skall alltså då ta fram vad $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ avbildas på under T.

Speglingen av en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^t$ i x-axeln är $\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \end{bmatrix}^t$.

Speglar vi $\mathbf{e}_1$ i L, så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$, och speglar vi sedan $\mathbf{s}_1$ i x-axeln går den då på $\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{t}_1$.

Speglar vi $\mathbf{e}_2$ i L, så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t$, och speglar vi sedan $\mathbf{s}_2$ i x-axeln går den då på $\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{t}_2$.

Så standardmatrisen för T är

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Svar: Standardmatrisen för T är:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(d) Matrisen för rotation i $\mathbb{R}^2$ med θ radianer moturs är:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

så om vi låter $\theta = -\pi/3$, så blir $R = A$, där A är standardmatrisen för T från (c).

Svar: T är rotation med $-\pi/3$ radianer moturs.

7. (a) Med hjälp av produktformeln för determinanter $\det(CD) = \det(C)\det(D)$, och att $\det(I_n) = 1$, där I_n är enhetsmatrisen, så får man att $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Dessutom gäller produktformeln för fler än två matriser, och vi får då att

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(A)(1/\det(B)) = \det(A).$$

Så påståendet är Sant.

(b) Enligt satsen om inverterbara matriser, så har en 3×3-matris A linjärt oberoende kolonner (e.) om och endast om den är inverterbar (a.). Igen, enligt satsen om inverterbara matriser, så är A inverterbar (a.) om och endast A^t är inverterbar (l.). Använder vi då satsen om inverterbara matriser på A^t, så får vi då att A^t är inverterbar om och endast om A^t har linjärt oberoende kolonner. Men eftersom kolonnerna till A^t är (transponatet av) raderna till A, så får vi då att kolonnerna till A är linjärt oberoende om och endast om raderna till A är linjärt oberoende. Så påståendet är Sant.

(c) En 3×2-matris kan aldrig ha linjärt oberoende rader, eftersom de då bildar 3 stycken vektorer i $\mathbb{R}^2$. Så vilken 3×2-matris med linjärt oberoende kolonner ger ett motexempel till påståendet. Till exempel kan vi ta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

där kolonnerna är linjärt oberoende, men inte raderna.

8. (a) Se Lay, avsnitt 6.2.

(b) Se Lay, Sats 6.2.4.

Tentamen
TMV141 Linjär algebra E

140312 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Åse Fahlander , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (i) Ge exempel på en reell 2×2 matris $A \neq 0$ sådan att $A^2 = 0$. Kan A vara symmetrisk? Motivera ditt svar. (2p)

(ii) Lös matrisekvationen (4p)

$$A^T AX = BX + C$$

där $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och C är den $n \times 1$ matris, där n bestäms av ekvationen, vars alla element är ettor.

3. (i) Definiera begreppet ortogonal komplement till ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (1p)

(ii) Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna (5p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal bas för U och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på U.

4. (i) Definiera begreppet diagonaliserbar matris. (1p)

(ii) Lös följande system av differentialekvationer (5p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \quad -2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) \quad +4x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (i) Hitta alla värden på a sådana att följande matris är diagonaliserbar: (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(ii) Bestäm för eventuella sådana a gränsvärdet av A^n då $n \to \infty$.

6. Betrakta avbildningen $F : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ given av (6p)

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (2a_1 - 2a_2) + (2a_0 + 3a_2)t + 3a_2 t^2.$$

(i) Bestäm matrisen för F i standardbasen $\{1, t, t^2\}$. Visa att även $\{1+t, 1-t, t+t^2\}$ är en bas i $\mathbb{P}_2$ och bestäm matrisen för F i denna bas.

(ii) Bestäm tre egenvektorer och motsvarande egenvärden till F.

7. (i) Låt A vara en $m \times n$ matris och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Förklara varför minstakvadratlösningarna till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. (6p)

(ii) För en $m \times n$ matris A, visa att $A^T A$ är inverterbar om och endast om A har rang n.

Lycka till!
Iulia Pop

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 140312	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm determinanten av AB där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Ange alla reella h sådana att vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$ (3p)

spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$.

Lösning:

Svar: ....

(c) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och har egenvek- (3p)

torn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenvärdet 2. Bestäm standardmatrisen för T och bilden av $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning:

(d) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet av följande matris (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ som utgör baserna $\mathcal{B}$ respektive $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^2$. Bestäm basbytematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ samt koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar till Tentamen TMV141

140312

(1) (a) Utveckling efter andra kolonnen ger $\det A = -(-3)(1\cdot 5 - 3\cdot 4) = -21$.
B är uppåttriangulär, alltså är $\det B = 1\cdot 4\cdot 6 = 24$.
$\det(AB) = \det A \cdot \det B = -21\cdot 24 = -504$.

(b) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ spänner upp ett plan omm de är linjärt beroende.
Ekvivalent, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & h \end{vmatrix} = 0 \iff -2(-9+4) + h(1-3) = 0 \iff h = -7$

(c) $T(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $T(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \Rightarrow T(\bar{e}_1) + T(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow T(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \bar{e}_2$
Avbildningsmatrisen m.a.p. basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ är $A = [T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
$T(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 2T(\bar{e}_1) + T(\bar{e}_2) = 2(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \bar{e}_2 = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (-3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} (2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2 pivot i kolonnerna 1 och 2.

Col(A) har bas $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (pivotkolonnerna).

Nul(A) : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2(t-2s) - 3t - 4s = -5t \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = t - 2s \\ x_3 = t,\ x_4 = s \end{cases}$ $\Rightarrow$ Nul(A) = span$\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -5t \\ t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

l. oberoende alltså en bas för nollrummet.

(e) $\underset{C\leftarrow B}{P} = P_C^{-1} P_B$, $P_B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $P_C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

$P_C^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

$P_C^{-1}\bar{x} = [\bar{x}]_C \Rightarrow [\bar{x}]_C = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(2). (i) T.ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfierar $A^2 = 0$.
Antag att $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ och $A^2 = 0$. Man får $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & b^2+d^2 \end{bmatrix}$
som ger att $a^2 + b^2 = 0$, $b^2 + d^2 = 0$. Eftersom $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b = d = 0 \Rightarrow A = 0$
Svaret är alltså nej!

(ii) $A^TAX = BX + C \iff (A^TA - B)X = C$
$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Låt oss invertera den:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \quad \underbrace{}_{(A^TA-B)^{-1}} \Rightarrow (A^TA-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eftersom $A^TA - B$ är av typ 3×3, C måste vara av typ $3\times 1 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$X = (A^TA-B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3). (i) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ underrum ; $W^\perp = \{ \bar{u} \in \mathbb{R}^n : \bar{u} \perp \bar{w}, \forall \bar{w} \in W \}$
$= \{ \bar{u} \in \mathbb{R}^n : \bar{u}\cdot\bar{w} = 0, (\forall)\, \bar{w} \in W \}$.

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \text{ pivot} \Rightarrow \dim Col(A) = 2$$

$Col(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Betrakta $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$

$$\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Då blir $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en ortogonal bas för U.

Enligt projektionsformeln: $\text{proj}_U \bar{v} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}_2}{\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{1}{3}\bar{u}_1 + \bar{u}_2$

$$= \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(4). (i) Diagonaliserbar matris: En kvadratisk $n\times n$ matris A kallas diagonaliserbar om det finns en diagonalmatris D och en inverterbar P så att $A = PDP^{-1}$.

(ii) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vi diagonaliserar A.

Egenvärdena: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Egenrummen: $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ linjen $t\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$: $(A - 3I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ linjen $t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Den allmänna lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$t=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -2, c_2 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 4e^{2t} - 3e^{3t}, \quad x_2 = -2e^{2t} + 3e^{3t}$.

(5). Egenvärdena till A är $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 0{,}5$.

A är diagonaliserbar omm egenrummet motsvarande $\lambda = 1$ är 2-dim (man behöver inte kolla egenvärdet λ_3 eftersom egenrummet blir automatiskt 1-dim).

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (A-I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{cases} ax_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Om $a \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$; $x_3 = 0 \Rightarrow$ egenrummet är linjen $x_1 = t$, $x_2 = x_3 = 0$ 1-dim!

Alltså måste $\boxed{a = 0}$. Då får man $x_1 = t$, $x_2 = s$, $x_3 = 0 \Rightarrow \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

För $\lambda = 0{,}5 \Rightarrow (A - \frac{1}{2}I)\bar{x} = \bar{0}$ har lösningen $\bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi får $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5^n \end{bmatrix} P^{-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(6) $F(1) = 2t$, $F(t) = 2$, $F(t^2) = -2 + 3t + 3t^2 \Rightarrow$ matrisen till F m.a.p. standardbasen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ är $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Polynomen $1+t$, $1-t$, $t+t^2$ är linjärt oberoende eftersom deras koordinatvektorer i $\mathbb{R}^3$ blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som är linjärt oberoende (kolla matrisen $P_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ som har determinant $-2 \neq 0$, alltså inverterbar).

Eftersom $\dim P_2 = 3$, är då $1+t$, $1-t$, $t+t^2$ en bas.

Vi har $A = P_B M P_B^{-1}$, där M är den nya matrisen m.a.p. bas B.

Då är $M = P_B^{-1} A P_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Alternativt, kan man beräkna

$F(1+t) = 2 + 2t = 2(1+t)$, $F(1-t) = -2 + 2t = -2(1-t)$, $F(t+t^2) = 3(t+t^2)$

som leder till $M = \left[[F(1+t)]_B \ [F(1-t)]_B \ [F(t+t^2)]_B \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Enligt ovan är $1+t$, $1-t$, $t+t^2$ egenvektorer till F som svarar mot $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

(7) (i) Se Lay s. 361.

(ii) Man kan visa att $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(A^TA)$.

$\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathrm{Nul}(A^TA)$ eftersom om $A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow A^TA\bar{x} = \bar{0}$. Vi har följande:

Låt $\bar{x} \in \mathrm{Nul}(A^TA) \Rightarrow A^TA\bar{x} = \bar{0}$.

$$\|A\bar{x}\|^2 = A\bar{x} \cdot A\bar{x} = (A\bar{x})^T A\bar{x} = \bar{x}^T \underbrace{A^TA\bar{x}}_{\bar{0}} = \bar{x} \cdot \bar{0} = 0 \Rightarrow \|A\bar{x}\| = 0 \Rightarrow A\bar{x} = 0.$$

$\Rightarrow \bar{x} \in Nul(A)$. Då har vi bevisat att $Nul(A^TA) \subseteq Nul(A)$

A^TA inverterbar omm $Nul(A^TA) = 0 \Leftrightarrow Nul(A) = 0 \Leftrightarrow$
$\dim Nul(A) = 0 \Leftrightarrow n - \text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = n$.

Tentamen
TMV141 Linjär algebra E

140825 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: doktorand , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationerna

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

(i) Bestäm en bas för W och ortogonalisera den. (4p)

(ii) Bestäm vektorn i W som har minsta avstånd till vektorn $(3, -2, 0, 3)$ och beräkna också detta avstånd. (2p)

3. (i) Låt A vara en kvadratisk matris sådan att $I - A^2$ är inverterbar. Visa att $A + I$ är också inverterbar. (2p)

(ii) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen (4p)

$$X + A^2(I - X) = A + I.$$

4. (i) Visa att om en kvadratisk matris A är både diagonaliserbar och inverterbar, så är A^{-1} också diagonaliserbar. (2p)

(ii) Låt (4p)

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna gränsvärdet av A^k då $k \to \infty$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (i) Definiera begreppet *bas* för ett vektorrum. (3p)

Låt $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ vara linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,\ldots,$ $\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1$.

(ii) Ange alla reella tal a sådana att följande polynom INTE utgör en bas i $\mathbb{P}_2$: (3p)

$$q_1 = a + t - t^2,\ q_2 = -1 + t + at^2,\ q_3 = a + 2t + 2t^2.$$

6. Visa att avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ som definieras av (6p)

$$T(p(t)) = tp'(t) + p(t+1)$$

är linjär. Bestäm en bas till $\mathbb{P}_2$ sådan att matrisen till T relativt denna bas är diagonal.

7. Visa följande påståenden:

(i) Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en injektiv linjär avbildning, så är $n \leq m$. (3p)

(ii) Om A är en $m \times n$ matris och B en $n \times p$ matris, så är $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$ och $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B)$. (3p)

Lycka till!
Iulia Pop

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 140825	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Betrakta följande bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm determinanten av ABA^{-1} där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet av följande matris (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller $T(1,1) = (3,2)$ och $T(1,-1) = (5,0)$. Beräkna standardmatrisen till T och bilden av $(2,1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm linjen i planet som är bäst anpassad till punkterna $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,8)$, i minsta kvadratmetodens mening. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Engelska	Svenska
adjugate	adjungerad
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation)
basic variable	basvariabel
basis	bas
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
domain	definitionsmängd
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv , på
overdetermined	överbestämt
range	värdemängd
rank	rang
row space	radrum
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation,avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unit vector	enhetsvektor
unique	entydigt bestämd
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero (vector)	noll(vektor)

Lösningar till Tentamen TMV141/MVE021

140825 kl. 8.30 – 12.30

1 (a) Koordinaterna i bas B ges av lösningarna till följande system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \ \ 4 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \end{array}\right] \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \end{array}\right] 5 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right] \tfrac{1}{4} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3 = 6,\ x_2 + x_3 = 3,\ -x_1 - 2x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -3,\ x_1 = -14 \Rightarrow \boxed{[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} -14 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}}$.

(b) $\det(ABA^{-1}) = \det A \cdot \det B \cdot (\det A)^{-1} = \det B = 1 \cdot 3 \cdot 6 = \boxed{18}$

(c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \ \ -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 pivotkolonner $\Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Col}(A) = 2}$ och en bas är $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$

$\mathrm{Nul}(A)$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Sätt $x_3 = t,\ x_4 = s \Rightarrow x_2 = 3t - s$ och $x_1 = -5t + 2s$.

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -5t+2s \\ 3t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Nul}(A)$ spänns upp av $\boxed{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{och} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ som är också l. oberoende, alltså bas.

(d) $T(1,1) = (3,2)$, $T(1,-1) = (5,0) \Rightarrow T(2,0) = T(1,1) + T(1,-1) = (3,2) + (5,0) = (8,2)$
$\Rightarrow T(1,0) = \frac{1}{2} T(2,0) = (4,1) \Rightarrow T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = (-1,1)$. Matrisen är följande: $\boxed{A = [T(\bar{e}_1)\ \ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$.

$T(2,1) = T(1,1) + T(1,0) = (3,2) + (4,1) = (7,3)$ (eller $T(2,1) = A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$).

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$; $A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 87 \end{bmatrix}$.

Den normaliserade ekvationen $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$ har lösningen $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$.

Den sökta linjen är alltså $\boxed{y = 0{,}3 + 1{,}5x}$.

② (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-1}{} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Sätt $x_3 = t$, $x_4 = s$ $\Rightarrow$ $x_2 = t$, $x_1 = -t-s$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ där $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, som är också linjärt oberoende

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är en bas till W.

Ortogonalisering proceduren: $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \dfrac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. En ortogonal bas är $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(ii) Vektorn som har minsta avstånd till $(3, -2, 0, 3)$ är projektionen på W.

$$\text{proj}_W \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \bar{u}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2} \bar{u}_2 = -\frac{5}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{avst}(\bar{v}, W) = \|\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v}\| = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

③ (i) $I - A^2 = (I-A)(I+A) \Rightarrow \det(I - A^2) = \det(I-A)\det(I+A)$

Om $I - A^2$ inverterbar $\Rightarrow$ $\cancel{\det}\ (I - A^2) \neq 0 \Rightarrow \det(I+A) \neq 0 \Rightarrow I + A$ inverterbar.

(ii) $X + A^2(I - X) = A + I \iff X + A^2 - A^2 X = A + I \iff (I - A^2)X = A - A^2 + I$

$I - A^2 = I - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ inverterbar ty $\det(I - A^2) = 9 \neq 0$.

Vi får $X = (I - A^2)^{-1}(A - A^2 + I) = (I - A^2)^{-1} A + I$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

④. (i) Om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, P inverterbar och D diagonal
$\Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ och D^{-1} är diagonal,
ty om $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$. Alltså är A^{-1} diagonaliserb

(ii) Låt oss diagonalisera A.

$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{7}{4} - \lambda\right)\left(-\frac{2}{4} - \lambda\right) + \frac{18}{16} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$
egenvärdena.

Motsvarande egenrummen:

$\lambda_1 = 1$: $(A - I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3/4 & -6/4 \\ 3/4 & -6/4 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = \frac{1}{4}$: $(A - \frac{1}{4}I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$t \in \mathbb{R}$.

A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$.

Vi får $A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} A^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} A^k = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5). En uppsättning vektorer $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ i ett vektorrum V kallas en bas om vektorerna är linjärt oberoende och spänner upp V.

Låt $W = \text{span}\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k, \bar{v}_k - \bar{v}_1\}$. Eftersom
$\bar{v}_k - \bar{v}_1 = -\left((\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + \cdots + \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k\right)$, kan man exkludera $\bar{v}_k - \bar{v}_1$
och man får $W = \text{span}\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k\}$.

Låt oss bevisa att $\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k$ är linjärt oberoende.

Antag att $\lambda_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \lambda_2(\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + \cdots + \lambda_{k-1}(\bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k) = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1\bar{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\bar{v}_3 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})\bar{v}_{k-1} - \lambda_{k-1}\bar{v}_k = \bar{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_1,\ \lambda_3 = \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1} = \lambda_{k-2},\ \lambda_{k-1} = 0$, eftersom $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ l. oberoende. Alltså får man $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$.

Då blir $\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{k-1} - \bar{v}_k$ en bas och $\dim W = k-1$.

ii) Låt $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_2$. Vi vet att $\mathbb{P}_2$ isomorf med $\mathbb{R}^3$.
Koordinatvektorerna till q_1, q_2, q_3 är respektive $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

q_1, q_2, q_3 är ej bas till $\mathbb{P}_2$ omm q_1, q_2, q_3 linjärt beroende

Ekvivalent, omm deras koordinatvektorer i $\mathbb{R}^3$ är l. beroende.

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff a^2-3a-4=0 \iff a=-1 \text{ eller } 4.$$

6. T är linjär : 1) $T((p_1+p_2)(t)) = t(p_1+p_2)'(t) + (p_1+p_2)(t+1) =$

$= tp_1'(t) + tp_2'(t) + p_1(t+1) + p_2(t+1) = T(p_1(t)) + T(p_2(t))$.

2) $T((\lambda p)(t)) = t(\lambda p)'(t) + (\lambda p)(t+1) =$

$= t\lambda p'(t) + \lambda p(t+1) = \lambda\, tp'(t) + p(t+1) = \lambda T(p(t))$

Matrisen till T relativt standardbasen $1, t, t^2$ är :

$M = [[T(1)]_\mathcal{E}\ [T(t)]_\mathcal{E}\ [T(t^2)]_\mathcal{E}]$

$T(1) = 1$, $T(t) = t + t + 1 = 2t+1$, $T(t^2) = 2t^2 + (t+1)^2 = 3t^2 + 2t + 1$.

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Låt oss diagonalisera M. Egenvärdena är $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$

Motsvarande egenvektorer :

$\lambda_1 = 1$: $(A-I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $(A-2I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = 0 \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 3$: $(A-3I)\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

En bas av egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, som motsvarar $1, 1+t, 3+4t+2t^2$

Matrisen till T relativt denna bas är just $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ty $M = P_B D P_B^{-1}$

<u>Svar</u>: $B = \{1, 1+t, 3+4t+2t^2\}$.

7. (i) Låt $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ vara bas till $\mathbb{R}^n$. Eftersom T injektiv, har ekv. $T(\bar{x}) = \bar{0}$ bara trivial lösning. Vektorerna $T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n)$ är l. oberoende ty om $x_1T(\bar{e}_1) + \dots + x_nT(\bar{e}_n) = \bar{0} \iff T(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n) = \bar{0} \iff$

$x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n = \bar{0} \iff x_1 = \dots = x_n = 0$.

Antag att $n > m$. Då har man n linj. oberoende vektorer i $\mathbb{R}^m$: $T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n)$. Vi får en motsägelse! Då måste $n \le m$.

(ii) Vi har $\mathrm{Nul}(AB) \supseteq \mathrm{Nul}(B)$ eftersom om $\bar{x} \in \mathrm{Nul}(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow B\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow AB\bar{x} = A\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} \in \mathrm{Nul}(AB)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Då är } \dim \mathrm{Nul}(B) \leq \dim \mathrm{Nul}(AB). \\ \text{Men } \dim \mathrm{Nul}(B) = p - \mathrm{rang}(B) \\ \quad\;\; \dim \mathrm{Nul}(AB) = p - \mathrm{rang}(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} p-\mathrm{rang}(B) \leq p-\mathrm{rang}(AB) \\ \Downarrow \\ \mathrm{rang}(B) \geq \mathrm{rang}(AB). \end{array}$$

$$\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}\left((AB)^T\right) = \mathrm{rang}(B^T A^T) \leq \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A).$$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 150318 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Frida Svelander
0703-088304

TMV141 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 och SI närvaro räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Lös det linjära ekvationssystemet (använd matrisform och elementära radoperationer) (4p)

$$\begin{aligned} x + y + 3z + 2w &= 7 \\ 2x - y + 4w &= 8 \\ 3y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

(b) Beräkna determinanten till matrisen A: (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Beräkna inversen till matrisen B: (3p)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Låt $B = \{b_1, b_2\}$ och $C = \{c_1, c_2\}$ där (3p)

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Beräkna basbytesmatriserna $P_{C \leftarrow B}$ och $P_{B \leftarrow C}$.

(b) Bestäm den linje som, i minsta kvadratmetodens mening, bäst anpassar till punkterna: $A(1,2), B(2,3), C(3,5), D(4,6), E(5,8)$ (4p)

(c) Definera begrepp *ortogonalt komplement* till ett underrum i $\mathbb{R}^n$? (1p)

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 6x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -5x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

$$x_1(0) = -3, \; x_2(0) = 7$$

Var god vänd!

4. (a) Låt (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange en bas för radrummet (Row(A)), kolonnrummet (Col(A)), nullrummet (Null(A)), samt rangen av A (rank(A)).

(b) Visa att kvadratiska formen $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$ ej är definit. (2p)

(c) Definera begreppen *symmetrisk matris* och *ortogonal matris* . (2p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej.

(a) Om A och B är $n \times n$ matriser och $AB = I_n$, då är $\lambda = 0$ egenvärde av A. (I - enhetsmatrisen) (3p)

(b) Om A är $n \times n$ matris och A uppfyller följande matrisekvation: $A^2 - 3A + I = 0$, då är A inverterbar. (I - enhetsmatrisen) (3p)

(c) Antag att A och B är similära matriser, då är egenvärdena av A och B lika med samma multiplicitet. (3p)

6. Summan av alla diagonalelement i en kvadratisk matris A kallas *matrisens spår* och betecknas tr(A). Låt A vara 2×2 matris: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Visa att karakteristiska polynomet av A är: (4p)

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

(b) Om A har två distinkta reella egenvärden λ_1 och λ_2, visa att: (5p)

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

Lycka till!

TMV141 Linjär algebra   Tenta: 150318

– LÖSNINGAR –

Del 1: Godkäntdelen

1. (a)
$$\begin{cases} x + y + 3z + 2w = 7 \\ 2x - y \qquad\quad + 4w = 8 \\ \quad 3y + 6z \qquad\quad = 6 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x &= 5 - z - 2w \\ y &= 2 - 2z \\ z &= t \\ w &= s \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t - 2s \\ 2 - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} = -2\left(2 + 0 + 4 - 4\right) + 2\left(-12 + 6 + 4\right) =$$

$$= -4 - 4 = -8$$

c) $B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\quad [B|I] \sim [I|C] \quad C = B^{-1}$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 \to -R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.
a) $P_{B \leftarrow C}$:

$[b_1\ b_2 | c_1\ c_2] \sim [I\ P_{B \leftarrow C}]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ -3 & 4 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \quad \underline{\underline{P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}}}$$

$$P_{C \leftarrow B} = P^{-1}_{B \leftarrow C} \Leftrightarrow P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 4 - 3 \cdot 6} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ eller

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -7 & -5 & 1 & -2 \\ 9 & 7 & -3 & 4 \end{array}\right] \sim \text{radreducerat} \quad [c_1\ c_2 | b_1\ b_2] \sim [I\ \cancel{B}\ P_{C \leftarrow B}]$$

2b) $y = \beta_1 + \beta_2 x$

$A(1,2), B(2,3), C(3,5), D(4,6), E(5,8)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}$$

$$X^T \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix}$$

$$X^T X \beta = X^T \bar{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 87 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x}$$

2c) Ortogonal komplement ($W^\perp$) är mängden av alla vektorer x i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W.

$$W^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0, \forall w \in W \}$$

3a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \quad \boxed{\lambda_2 = 7}$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda_2 = 7}$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

A är diagonaliserbar! $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{7t}$

$x_2(t) = 5c_1 e^t - c_2 e^{7t}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -3 \\ 5c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \tfrac{2}{3} \\ c_2 &= -\tfrac{11}{3} \end{aligned}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{2}{3} e^t - \tfrac{11}{3} e^{7t} \\ x_2(t) &= \tfrac{10}{3} e^t + \tfrac{11}{3} e^{7t} \end{aligned}}$$

4.

a) Reducera A till trappstegform:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&0\\0&1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-3&-3&-4\\0&1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&4/3\\0&1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&4/3\\0&0&0&2/3\end{bmatrix}$$

Icke-noll rader av trappstegform $\Rightarrow$ en bas av radrummet av A

$\text{Row}\,A=\{(1,2,1,2),(0,1,1,4/3),(0,0,0,2/3)\}$

Pivot el. i kolumner 1, 2 och 4

$$\text{Col}\,A=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$\text{Nul}\,A\Rightarrow Ax=0$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&4/3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$x_1=x_3$
$x_2=-x_3$
$x_3=x_3$ (fri)
$x_4=0$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \text{Nul}\,A=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$\text{Rank}(A)=3$ (A har 3 pivot el.)

b) $Q(x)=x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2$

$$A=\begin{bmatrix}1&-4\\-4&-5\end{bmatrix}\quad \det(A-\lambda I)=0\quad \begin{bmatrix}1-\lambda&-4\\-4&-5-\lambda\end{bmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2+4\lambda-21=0$$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=-7$

A har både positiva och negativa egenvärden $\Rightarrow$ Q är EJ DEFINIT!

c) En ~~kvadratisk~~ matris kallas symmetrisk om $A^T=A$

En kvadratisk matris kallas ortogonal om $A^T=A^{-1}$
$(A^TA=AA^T=I)$.

Del 2: Överbetygsdelen

5 a) F Om $\lambda = 0$ är egenvärde av A $\Rightarrow$ A är inte inverterbar (rank $A < n$).

b) T $A^2 - 3A + I = 0$

$$I = 3A - A^2$$
$$I = A(3I_n - A) \qquad B = 3I_n - A$$
$$I = A \cdot B \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A \text{ är inverterbar}$$

c) T Om A och B är similära matriser $\Rightarrow A = PBP^{-1}$

$$\begin{aligned} A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda I &= PBP^{-1} - \lambda PP^{-1} \\ &= PBP^{-1} - P\lambda P^{-1} \\ &= P(B - \lambda I)P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(P(B-\lambda I)P^{-1}\right) = \det(P)\det(B-\lambda I)\det(P^{-1}) = \\ &= \det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

Matriser A och B har lika karakteristiska polynom
$\Rightarrow$ deras egenvärden är lika med samma multiplicitet.

6. a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b \cdot c = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

$$= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

b) $$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\cdot(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = tr(A)$$

MATEMATIK | **Hjälpmedel: ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 160319kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Marija Cvijovic
076 2345 835

TMV141 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 och SI närvaro räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Lös det linjära ekvationssystemet (använd matrisform och elementära radoperationer) (3p)

$$\begin{aligned} 2y+3z+4w&=1\\ x-3y+4z+5w&=2\\ -3x+10y-6z-7w&=-4 \end{aligned}$$

(b) Beräkna determinanten till matrisen A, om A=BC där (3p)

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\-1&0&1&0\\-3&4&-2&1\end{bmatrix}\text{ och } C=\begin{bmatrix}1&-2&-2&-3\\0&-3&6&0\\0&0&2&4\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(c) Bestäm baser för Col(A) och Null(A) till matrisen A: (3p)

$$A=\begin{bmatrix}1&-4&-1&0&9\\-2&0&-3&-1&5\\3&-4&2&1&4\end{bmatrix}$$

(d) Beräkna inversen till matrisen A: (3p)

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-2&0&3\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

2. (a) Låt $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ och $C=\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}$ där (3p)

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Beräkna basbytesmatriserna $P_{C\leftarrow B}$ och $P_{B\leftarrow C}$.

(b) Bestäm den räta linje som, enligt minsta kvadratmetoden, bäst passar punkterna: (4p)

$$A=(-1,-1),\quad B=(0,1),\quad C=(2,3)\ \text{ och }\ D=(3,5)$$

(c) Definiera begreppet ”det *ortogonala komplementet*” till ett underrum i $\mathbb{R}^n$? (1p)

Var god vänd!

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer. (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 7x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

$$x_1(0) = -4,\ x_2(0) = 3$$

4. (a) Definiera vad som menas med nollrummet till en $m \times n$ matris A? (1p)

(b) Låt (3p)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala mot varandra och beräkna $\|\mathbf{u}\|^2$, $\|\mathbf{v}\|^2$ och $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$

(c) För vilka värden på skalären $h \in \mathbb{R}$ är följande vektorer *linjärt oberoende*? (4p)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} h \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 6 \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej.

(a) Om λ är ett egenvärde till en matris A då är λ^2 ett egenvärde till matrisen A^2. (2p)

(b) För alla kvadratiska matriser A och B gäller följande: (2p)

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

(c) Nollskilda ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. (2p)

(d) Om A är en 3×3 matris, då är $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Nul}(A))$. (2p)

(e) Produkten av två ortogonala matriser är en ortogonal matris. (2p)

(f) Låt $\mathbf{u}$ vara en lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}$ vara en lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = 0$, där A är en $m \times n$ matris och $\mathbf{b}$ är en vektor i $\mathbb{R}^m$. Då är $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

6. Betrakta följande *matrisekvationer*.

$$AXB = C - 2XB \tag{1}$$
$$XAB = C - 2XB \tag{2}$$

där matriserna A, B och C är definierade på följande vis.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Vilken av ekvation 1 och 2 har en lösning X? Vad har denna matris för dimension i sådant fall? (3p)

(b) Lös den ekvation som har en lösning baserat på din slutsats i deluppgift (a). (3p)

Lycka till!

TMV141 160319 Lösningar

Del 1

1\. a)
$$\begin{cases} 2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ x_1-3x_2+4x_3+5x_4=2 \\ -3x_1+10x_2-6x_3-7x_4=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & -7 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -12 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1/3 - 4/3\,x_4 \\ x_4 \text{ - fria } \quad x_4 = t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{3} - 4/3\,t \\ x_4 = t \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 4/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\det A = \det(BC) = \det B \det C = (1\cdot1\cdot1\cdot1)\cdot(1\cdot(-3)\cdot2\cdot1) = -6$$

c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -5 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot kolumner bildar en bas för Col (A) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

lösning av $Ax=0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} (-3k-s+5t)/2 \\ (-5k-s+23t)/8 \\ k \\ s \\ t \end{pmatrix}$

Bas för Nul (A) $= \left\{ \begin{bmatrix} -3/2 \\ -5/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/2 \\ 23/8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.
a) $\underset{C \leftarrow B}{P}$: $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ $\quad \underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = (\underset{C \leftarrow B}{P})^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$A^T y = \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\quad$ Den räta linjen : $y = mx + k$

$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{y = 7/5 x + 3/5}$

3.
a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5 \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $x(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x_1(0) = -4$, $x_2(0) = 3$

$x_1(t) = -c_1 - c_2$

$x_2(t) = 2c_1 + c_2$ $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} c_1 = -3 \\ c_2 = 7 \end{matrix}}$

4.
a) Nollrummet till en $m \times n$ matris A är mängden av alla vektorer x ~~så~~ som uppfyller $Ax = 0$.

b) $\|u\|^2 = u \cdot u = [1 \; 2 \; 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$ $\quad u + v = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\|v\|^2 = v \cdot v = [-11 \; 4 \; 1]\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 138$

$\|u+v\|^2 = [-10 \; 6 \; 4]\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 152$

5. a)(S) $Av=\lambda v \quad AAv = A(\lambda v) \Leftrightarrow A^2v = A(\lambda v) \Leftrightarrow A^2v = \lambda(Av)$

$\Leftrightarrow A^2v = \lambda(\lambda v) \Leftrightarrow A^2v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2$ är egenvärde av A^2.

b) (F) $(A+B)(A-B) = A\cdot A + A(-B) + B\cdot A + B(-B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

$AB \neq BA \Rightarrow (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

c) (S) Låt $w = \alpha u + \beta v$ vara en linjär kombination av u och v

Då har vi att $w=0$ $\quad u\cdot v = 0$

$\Leftrightarrow \|w\| = 0$ men $\|w\|^2 = (\alpha u + \beta v)(\alpha u + \beta v) =$

$= \alpha^2\|u\| + \beta^2\|v\|$ omm. $\alpha = \beta = 0$

d) (F) ~~Om~~ A är en 3×3 matris $\Rightarrow$ A har 3 kolonner

$\dim \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rank}\, A$

Från rank satzen $\Rightarrow \mathrm{rank}\, A + \dim \mathrm{Nul}(A) = n$

$n=3 \Rightarrow \mathrm{rank}\, A + \dim \mathrm{Nul}(A) = 3$

$\Leftrightarrow \dim \mathrm{col}(A) + \dim \mathrm{Nul}(A) = 3$

om $\dim \mathrm{col}(A) = \dim(\mathrm{Nul} A)$

$\Rightarrow 2 \dim \mathrm{Col}(A) = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{col}(A) = 3/2$

$\Rightarrow$ omöjligt sedan både rank A och dim Nul (A) måste bli hel tal

e) (S) $(AB)^T(AB) = B^T A A B = B^T I B = B^T B = I$

f) (S) u är en lösning av $Ax=b \Rightarrow Au=b$

v är en lösning av $Ax=0 \Rightarrow Av=0$

$A(u+v) = Au + Av = b + 0 = b \Rightarrow A(u+v) = b \Rightarrow u+v$ är lösning av $Ax=b$.

4. c) $V = [v_1\ v_2\ v_3]$ $\quad \det V = \det \begin{vmatrix} h & 0 & -2 \\ -2 & h & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = h^2 + 24$

Eftersom $\det(v) \neq 0$ för alla $h \in \mathbb{R}$ då är vektorerna alltid linjär oberoende.

6. a) Matrisen C har dimension 3×2 } ⇒ Produkten $2XB$ måste
Matrisen B har dimension 2×2 }

har samma dimension ⇒ $XB \sim 3\times2$.

För produkten XB skall vara definierad, så måste följande likhet gälla: $\underbrace{XB}_{3\times2} = \underbrace{X}_{3\times2}\cdot\underbrace{B}_{2\times2}$ ⇒ X har dimension 3×2.

Eq 1 ⇒ $\underbrace{AXB}_{3\times2} = \underbrace{A}_{3\times3}\underbrace{X}_{3\times2}\underbrace{B}_{2\times2}$ ⇒ X har dim 3×2

Eq 2 ⇒ $\underbrace{XAB}_{3\times2} = \underbrace{X}_{3\times2}\underbrace{A}_{3\times3}\underbrace{B}_{2\times2}$ ⇒. AB produkt är <u>inte</u> definierad

⇒ Eq 1 har en lösning X dim 3×2.

b) $AXB = C - 2XB \Rightarrow AXB + 2XB = C$

$$\Rightarrow (AX + 2X)B = C$$

$$\Rightarrow (AX + 2X)\underbrace{BB^{-1}}_{I} = CB^{-1}$$

$$\Rightarrow (A + 2I_{3\times3})X = CB^{-1} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + 2I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow B^{-1} = B$$

$$CB = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = CB^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIK | | **Hjälpmedel: ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 170313 kl. 14.00 - 18.00 Tentamen Telefonvakt: Carl Lundholm 5325

TMV143 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Bonuspoäng från duggor 2017 och SI närvaro räknas med.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng, för betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng.För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm $\det(A)$, $\det(A^2)$ och $\det(2A)$. (3p)

(b) Finn en matris X som uppfyller $2AX = B$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$. (3p)

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 11 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm den unika lösningen $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ till $Ax = b$. (3p)

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

i. Bestäm A^{-1}. (3p)

ii. Visa att $B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (1p)

iii. Bestäm inversen till AB. (2p)

2. (a) Ange definitionen för nollrummet till en $m \times n$ matris A. (1p)

(b) Bestäm rang(A), samt baser och dimensioner för Row(A), Col(A) och Nul(A), där (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -18 & 15 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer : (3p)

$$x_1'(t) = -18x_1(t) + 15x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -20x_1(t) + 17x_2(t)$$

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

Var god vänd!

4. (a) Bestäm den linje $y = kx + m$ som i minsta kvadratmetodens mening är bäst anpassad till punkterna: (3p)

$$A = (1, 0), B = (2, 1), C = (3, 3), D = (4, 4)$$

(b) Låt $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$ vara de baser för $\mathbb{R}^2$ som respektive består av

$$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basytesmatriserna $P_{C \leftarrow B}$ och $P_{B \leftarrow C}$ (2p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svar måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej.

(a) Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Om $AB = BA$ gäller även att $A^2B = BA^2$. (2p)

(b) Om en $n \times n$-matris A är inverterbar, så är även A^2 inverterbar. (2p)

(c) Om en $n \times n$-matris A är symmetrisk, så är även A^2 symmetrisk. (2p)

(d) Låt A vara en $n \times n$-matris som uppfyller $A^2 = A + I_n$. Då gäller att A är inverterbar. (2p)

(e) Låt A vara en $n \times n$-matris. A är ortogonalt diagonaliserbar o.m.m. A är en symmetrisk matris. (2p)

(f) Låt A vara en $m \times n$-matris med ortonormerade kolonner och låt x vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Då gäller att $\|Ax\| = \|x\|$ (2p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris och $Q(x) = X^T(A^TA)X$ den kvadratiska formen definierad av den symmetriska matrisen A^TA.

(a) Visa att Q är positivt semidefinit oavsett valet av A. (3p)

(b) Visa eller vederlägg: Om A är inverterbar så är Q positivt definit. (3p)

TIPS: En kvadratisk form Q är:

(a) Positivt definit om $Q(x) \geq 0$ för alla x, där $Q(x) = 0$ endast för $x = 0$ (x är en vektor).

(b) Positivt semidefinit om $Q(x) \geq 0$ för alla x, där $Q(x) = 0$ för något $x \neq 0$ (x är en vektor).

Lycka till!

Marija

TMV143 170313 lösningar

1\. a) $\det\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&7&4\end{bmatrix} = \det\left|\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&2\\2&3&2&2&3\\3&7&4&3&7\end{array}\right| = (12+12+14) -$

$-(16+14+9) = 24-25=-1$ $\quad \det(A)=-1$

$\det(A^2) = (\det(A))^2 = (-1)^2 = 1$

$\det(2A) = 2^3\cdot\det(A) = 8\cdot(-1) = -8$ $\quad (2^3$ pga $A=3\times 3)$

b) $2AX=B$

$\frac{1}{2}A^{-1}\,(2AX) = \frac{1}{2}A^{-1}\cdot B \iff \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 2}_{1}\,\underbrace{A^{-1}A}_{I}\cdot X = \frac{1}{2}A^{-1}B$

$\Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}B$

$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$, så $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&4\\-8&6&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-4&3&1\end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix}13&-9&-1\\-4&3&1\end{pmatrix}$

c) $x_i = \dfrac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$, $i=1,2,3$

$\det(A_1(b)) = \begin{vmatrix}1&3&1\\0&5&1\\1&11&1\end{vmatrix} = -8$

$\det(A_2(b)) = \begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&1&1\end{vmatrix} = 2$

$\det(A_3(b)) = \begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&0\\3&11&1\end{vmatrix} = 6$

$\det(A) = \begin{vmatrix}1&3&1\\2&5&1\\3&11&1\end{vmatrix} = 4$

$x_1 = \frac{-8}{4} = -2$

$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\boxed{X = \left(-2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$

d) d1) $[A|I]$ radoperationer: $R_2 \to 2R_2 + R_1$; $R_3 \to 3R_3 - R_2$

$R_1 \to 3R_1 - R_2$; $R_1 \to R_1 + 2R_3$; $R_2 \to R_2 + 4R_3$; $R_1 \to \frac{1}{6}R_1$,

$R_2 = \frac{1}{3} R_2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

d2) Det är bara att kontrollera att:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d3) $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -11 \\ -4 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2\. a) För en $m \times n$ matris A gäller att $Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Mängden av alla lösningar till $Ax = 0$

b) Då vi utför radoperationerna:

$R_2 \to R_2 - 2R_1$; $R_3 \to R_3 - R_1$; $R_2 = \frac{1}{10} R_2$, $R_3 \to R_3 - 4R_2$

$$\text{Trappstegsformen} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Row(A) - nollskilda raderna:

Bas för $Row(A) = \{[1, 2\ -3\ -3], [0\ 0\ 1\ 2]\}$

* Pivoterna ligger i 1:a och 3:a kolonner, och dessa kolonner utgör en bas för kolonnrummet:

Bas för $Col(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

* Nul(A), låt $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in Nul(A)$, x_2 och x_4 är fria:

$x_3 = -2x_4$, $x_1 = -2x_2 - 3x_4$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_2 = s$, $x_4 = t$ $x_3 = -2t$ $x_1 = -2s - 3t$

Bas för $Nul(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\left.\begin{aligned} &rank(A) = \cancel{col}\ \dim Col(A) \\ &\dim Col(A) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow rank(A) = 2 \quad \Big\} \quad \begin{aligned} &\dim Col(A) + \dim Nul(A) = n \\ &\underline{\underline{2 + 2 = 4}} \end{aligned}$$

$\dim Nul(A) = 2$

3.

a) $A = \begin{bmatrix} -18 & 15 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -18-\lambda & 15 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2} \quad \boxed{\lambda_2 = -3}$$

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -20 & 15 \\ -20 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -3 \Rightarrow A + 3I = \begin{bmatrix} -15 & 15 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{\lambda_2}$

$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \\ x_2(t) &= 4c_1 e^{2t} + c e^{-3t} \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} x_1(0) &= 2 \\ x_2(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1(t) &= -3e^{2t} + 5e^{-3t} \\ x_2(t) &= -4e^{2t} + 5e^{-3t} \end{aligned}$$

4. a) $y = m + kx \quad A(1,0),\ B(2,1),\ C(3,3),\ D(4,4)$

$$\begin{aligned} m + k &= 0 \\ m + 2k &= 1 \\ m + 3k &= 3 \\ m + 4k &= 4 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} m = -3/2 \\ k = 7/5 \end{matrix}$$

$$y = 7/5\, x - 3/2$$

b) $P_{C \leftarrow B} : \left[c_1 \ c_2 \mid b_1 \ b_2 \right] \sim \left(I \mid P_{C \leftarrow B} \right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \end{array} \right] \quad P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$P_{B \leftarrow C} = P_{C \leftarrow B}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{181} \begin{bmatrix} 10 & -13 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

5. a) $A^2B = BA^2 \Leftrightarrow$ = $\wedge\ AB = BA \quad A^{4\times4}$ och $B^{4\times4}$.

$$\underline{\underline{A^2B}} = (AA)B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A =$$
$$= B(AA) = \underline{\underline{BA^2}} \qquad \text{Sant}$$

b) $A^{-1} \cdot A = I \Leftrightarrow A$ är inverterbar

$$(A^{-1}A)^2 = (A^{-1})^2 A^2 = A^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A = A^{-1}A = I \qquad \text{Sant}$$

$\Rightarrow A^2$ är inverterbar

c) A symmetrisk $\Rightarrow A^T = A$

$A^2 = (A^T)^2 = A^T A^T = (AA)^T = (A^2)^T \Rightarrow A^2$ är symmetrisk

Sant

d) $A^2 = A + I_n \Rightarrow A$ är inverterbar

$A^2 = A + I_n \Leftrightarrow A^2 - A = I_n \Leftrightarrow A\underbrace{(A-I)}_{B} = I_n$

$\Rightarrow A \cdot B = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$ Sant

e) A är ortogonal diagonaliserbar o.m.m A är symmetrisk

A är ortogonal diagonaliserbar $\Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^T$

A är symmetrisk $\Rightarrow A^T = A$

$\Lambda^T = \Lambda \Rightarrow \Lambda$ är diagonalmatris

$A^T = (P\Lambda P^T)^T = (P^T)^T \Lambda^T P^T = P\Lambda^T P^T = P\Lambda P^T = A$

$\Rightarrow$ A är symmetrisk Sant

f) $\|Ux\| = (Ux)(Ux) = (Ux)^T(Ux) = x^T U^T U x = x^T x \Rightarrow x \cdot x = \|x\|$

I U har ortonormerade kolonner

$U = U^T \Rightarrow U^T U = 1$

6. a) Vi kan bevisa att $Q(x) \geq 0 \ \forall x$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$Q(x) = x^T(A^T A)x = (x^T A^T)Ax = (Ax)^T Ax = Ax\,Ax = \|Ax\|^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}^4$

b) Antar att A är inverterbar. Från (a) vet vi att $Q(x) = \|Ax\|^2 \geq 0$ $\forall x$ (Q är positivt semidefinit)

Från $Q(x) = \|(Ax)\|^2$ ser vi att $Q(x) = 0$ o.m.m $Ax = 0$

$Ax = 0 \Leftrightarrow A^{-1}Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Altså $Q(x) \geq 0$ och $Q(x) = 0$ endast om $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Detta betyder att $Q(x)$ är positivt definit (dvs. om A är inverterbar så är $Q(x) = x^T(A^T A)x$ positivt definit).

MATEMATIK **Hjälpmedel: ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 180312 kl. 14.00 - 18.00 Tentamen Telefonvakt: Barbara Schnitzer
5325

TMV143 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslistan och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Bonuspoäng från 2018 års duggor och SI närvaro räknas också.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng, för betyg 4 eller 5 krävs 33 respektive 42 poäng. För godkänt på kursen skall även Matlab momentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning av tenta kan ske under alla vardagar utom onsdag 9-13 i MV:s expedition.

---

1. (a) Bestäm, med hjälp av Cramers regel, lösningen till följande ekvationssystem. (3p)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestäm matrisen X som uppfyller $2AX = B$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Låt $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara två tredimensionella vektorer. Visa att u och v är ortogonala mot varandra samt beräkna $\|u\|^2$, $\|v\|^2$ och $\|u+v\|^2$. (3p)

(d) Låt $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm B^{-1}. (3p)

(e) Bestäm volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna (3p)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \quad \text{och} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{i } \mathbb{R}^3.$$

2. (a) Bestäm maximum och minimum för följande kvadratiska form (3p)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3^2$$

då x_1, x_2 och x_3 uppfyller likheten $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$.

(b) Ange en ekvation till den linje som bäst anpassar, i minsta kvadratmetodens mening, punkterna (3p)

$$A = (1, 5),\; B = (2, 6),\; C = (3, 10),\; D = (4, 12) \;\text{ och }\; E = (5, 17).$$

3. (a) Ange definitionen av *nollrummet* till en $m \times n$ matris. (2p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. Bestäm både en bas samt dimension till $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$ och $\mathrm{Row}(A)$. (4p)

Var god vänd!

4. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer: (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 9x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + 6x_2(t) \end{aligned}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1$$

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svar måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej.

(a) Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Om B är inverterbar då gäller att $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$. (2p)

(b) Låt A vara en 3×4 matris. Om $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$ gäller även att $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ där $\mathbf{0}$ finns i $\mathbb{R}^4$. (2p)

(c) Om en $n \times n$-matris A är symmetrisk och inverterbar, så är även A^{-1} symmetrisk. (2p)

(d) Produkten av två ortogonala matriser är en ortogonal matris. (2p)

(e) Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Då gäller att $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. (2p)

6. Låt (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm lösningen till följande system av matrisekvationer.

$$\begin{aligned} AX + BY &= C \\ DX + EY &= F \end{aligned}$$

Lycka till!

Marija

TMV143 Lösningar

Tenta 180312

1. a) $x_i = \dfrac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$ $\qquad \det(A)=2$

$\det(A_1(b)) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 9 \qquad x_1 = \dfrac{9}{2}$

$\det(A_2(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \qquad x_2 = 7/2$

$\det(A_3(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad x_3 = -5/2$

b) $2AX = B \iff \left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)(2AX) = \left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)B$

$\iff \tfrac{1}{2}\cdot 2\, A^{-1}A\,X = \tfrac{1}{2}A^{-1}B$

$\iff X = \tfrac{1}{2}A^{-1}B$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\det(B) = 0 \Rightarrow B^{-1}$ finns ej!

d) $u \bullet v = u^T v = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\|u\|^2 = u \cdot u = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$

$\|v\|^2 = v v = [-11\ 4\ 1]\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 138$

$\|u+v\|^2 = [-10\ 6\ 4]\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 162 \; ; (u+v) = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $V = \left|\det\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |14| = 14$

2. a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ Egenvärden $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_{min} = -3 \\ \lambda_{max} = 3 \end{array}$

$|X|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$

$\lambda_{min}|X|^2 \leq Q \leq \lambda_{max}|X|^2$

$-3 \cdot 2 \leq Q \leq 3 \cdot 2$

$-6 \leq Q \leq 6 \qquad Q_{min} = -6 \quad Q_{max} = 6$

2. b) $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$

$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1} A^Tb = 1/10 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \cdot 10 \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$y = 3x + 1$

3. a) Mängden av alla lösningar till den homogena ekv-sys. $Ax = 0$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pivot kolloner

~~Ka~~ $\mathrm{col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ dim Col (A) = 2

$\mathrm{Row}(A) = \{ [1 \; 0 \; -2 \; 3], [-2, 1, 4, 0] \}$ dim Row (A) = 2

$Ax = 0 \quad x = \begin{bmatrix} 2x_3 - 3x_4 \\ -6x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

dim Nul (A) = 2

4. a) $\det(A-\lambda I)=0 \qquad \det\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \qquad v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 10 \qquad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$x(t) = c_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{5t} + 2c_2 e^{10t} \\ x_2(t) &= -2c_1 e^{5t} + c_2 e^{10t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -1/5 \\ c_2 &= 3/5 \end{aligned}$

$x_1(t) = -1/5\, e^{5t} + 6/5\, e^{10t}$

$x_2(t) = 2/5\, e^{5t} + 3/5\, e^{10t}$

5. a) $\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) =$ S

$= \det(B)\det(A)\dfrac{1}{\det(B)} = \det(A)$

b) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ S

c) $(AB)^T(AB) = B^T A^T A B = B^T I B = B^T B = I$ S

d) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ F

$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \qquad AB \neq BA$

6. Lägg $-DA^{-1}\cdot$ rad 1 till rad 2 $\Rightarrow (E - DA^{-1}B)\,Y = F - DA^{-1}C$ ⊛

$$DA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E - DA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F - DA^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

obs! $(E - DA^{-1}B)$ med invers $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

⊛ : $$Y = (E - DA^{-1}B)^{-1}(F - DA^{-1}C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - BY) = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$