TMV141 VEKTORRUMMETS DIMENSION, BAS, RANG

L10

En LINJÄR AVBILDNING T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en regel som till varje vektor $x \in V$ ordnar en entydligt bestämd vektor $T(x) \in W$ sådan att:

1) $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$
2) $T(cu) = c \cdot T(u) \quad \forall u \in V$ och $\forall c \in \mathbb{R}$

KÄRNAN (KERNEL) till en linjär avbildning $T: V \to W$ är mängden av alla $u \in V$ sådan att $T(u) = 0$

VÄRDMÄNGDEN (RANGE,) till T är mängden av alla $w \in W$ som är bild av någon vektor $x \in V$

Låt H vara ett vektorrum. En mängd av vektorer $B = \{b_1, .., b_p\}$ i H kallas en BAS för H om:

1) B är en linjärt oberoende mängd
2) Underrummet som spänns av B är hela rummet H

dvs. $H = \text{Span}\{b_1, .., b_p\}$

Sats (4.5.10) Om ett vektorrum V har en bas som består av n vektorer så består alla baser för V av precis n vektorer.

Talet n kallas VEKTORRUMETS DIMENSION.

Om V spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V ÄNDLIGTDIMENSIONELLT. Dimension av V ($\dim V$) är antalet vektorer i en bas för V.

Om V innehåller endast nollvektorn $V = \{0\}$ så är $\dim V = 0$

Om V inte spänns upp av ändlig mängd av vektorer, så kallas V OÄNDLIGTDIMENSIONELLT.

BAS för NOLLRUMMET till en matris A
Lös homogena ekv. sys. ⇒ vektorerna som är oberoende (de som har fria variabler) utgör en bas.

BAS för KOLONNRUMMET till en matris A:
Pivotkolonnerna i A ~~bildar~~ bildar en bas för Col(A)

Sats (4.5.12) BASSATSEN
Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum $p \geq 1$. Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för V. Varje mäng bestående av exakt p vektorer som spänner upp V är också ~~en~~ automatiskt en bas för V.

DIMENSION av NOLLRUMMET (dim Nul(A)) är antalet FRIA variabler i ekv. $Ax = 0$

DIMENSION av KOLONNRUMMET (dim Col(A)) är antalet PIVOTKOLONNER i A.

Ex $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ radreducerad $[A|0]$ till trappstegform $\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pivot kolonner

$\Leftrightarrow$ x_2, x_4, x_5 - fria

$x_2 = r$
$x_4 = s$
$x_5 = t$

$x_1 = 2r + s - 3t$
$x_3 = -2s + 2t$

Fri variabler $x_2, x_4, x_5 \Rightarrow \dim Nul(A) = 3$
2 Pivotkolonner $\Rightarrow \dim Col(A) = 2$

RANG (RANK)

Låt A vara $m \times n$ matris. Varje rad i A har n elementer och därför kan identifieras med en vektor i $\mathbb{R}^n$.
Mängd av alla linjära kombinationer (linjära höljet) av alla RADVEKTORER i A kallas RADRUMMET (Row A) av A.

Sats (4.6.13) Om två matriser A och B är radekvivalenta så är Row A = Row B.
Om U är en trappstegsform av A så är pivotraderna i U en bas för Row A.

RANGEN av A (rank A) är dimension av kolonnrummet av A

Sats (4.6.14) DIMENSIONSATSEN (The rank theorem)
Låt A vara $m \times n$-matris, då:

$$\boxed{\text{rank} A + \dim \text{Nul } A = n}$$

antalet pivot col + antalet icke pivot kol = antalet kolonner

$\text{rank } A$ = antalet pivot kolonner i A

Ex Bestäm rank(A) för olika värden på parametern p där:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & p & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Överför matris A till trappstegform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & p & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & p-6 & -5 \\ 0 & 1 & -8 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & p-6 & -5 \\ 0 & 0 & (-p-2) & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har följande två fall:

1) Om $p = -2$ så är $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & p-6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ (två ledande ettor)

2) Om $p \neq -2$ kan vi dela sista raden med $(-p-2)$. Då blir
$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & p-6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ (tre ledande ettor)

Sats 2.3.8 (om inverterbara matriser egenskaper).

Låt A vara $n \times n$ matris, då är följande påståend ekv.

Tidigare (L.6 påstående 1) – 12)

+

13) Kolonnerna i A bildar en bas i $\mathbb{R}^n$

14) $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$

15) $\dim \operatorname{Col} A = n$

16) $\operatorname{rank} A = n$

17) $\operatorname{Nul} A = \{0\}$

18) $\dim \operatorname{Nul} A = 0$

19) $\det(A) \neq 0$

Ex Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ange en bas för radrummet $(\operatorname{Row}(A))$, kolonnrummet $(\operatorname{Col}(A))$, nollrummet $(\operatorname{Nul}(A))$ samt rangen av A $(\operatorname{rank}(A))$.

Reducera A till trappstegform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Icke-noll rader av trappstegform $\Rightarrow$ en bas av radrummet av A

$\underline{\operatorname{Row} A} = \{(1,2,1,2), (0,1,1,4/3), (0,0,0,2/3)\}$

Pivotel i kolonner 1, 2 och 4

$\underline{\operatorname{Col} A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$\operatorname{Nul} A \Rightarrow Ax = 0$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_3 &= \text{fri} \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\operatorname{Nul}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

A har 3 pivotel $\Rightarrow$ $\underline{\operatorname{Rank}(A) = 3}$