TMV141 BASBYTE, BASER och KOORDINATER

L11

Def BASEN

Låt H vara ett vektorrum. En mängd av vektorer $\mathcal{B}=\{b_1,..,b_p\}$ i H kallas en BAS för H om:

1) $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd
2) Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är hela ~~rumme~~ rummet H
(dvs $H = \text{Span}\{b_1,..,b_p\}$)

BAS och KOORDINATER

Låt $\mathcal{B}=\{b_1,..,b_p\}$ vara en bas för H. Vilkoret 2) i basdefinition medför att varje vektor $u \in H$ kan skrivas som en linjär kombination av $b_1,..,b_p$:

$$u = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$$

~~Av~~ Koefficienterna $c_1,..,c_p$ kallas KOORDINATERNA för vektorn u i basen $\mathcal{B}$.

Sats (4.4.7) Antag att $\mathcal{B}=\{b_1,..,b_p\}$ är en bas för H. Då finns till varje vektor $u \in H$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer $c_1,..,c_p$, sådana att $x = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$.

Om $c_1,..,c_p$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för x så kallas vektorn i $\mathbb{R}^p$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för KOORDINATVEKTORN för x (relativt basen $\mathcal{B}$) eller $\mathcal{B}$-koordinatvektorn.

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $P_{\mathcal{B}} = [b_1, \dots, b_n]$.

Vektorekv. $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ är ekvivalent med

$$x = P_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}.$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas för BASBYTEMATRISEN från $\mathcal{B}$ till standardbasen

Eftersom $P_{\mathcal{B}}$:s kolonner är linjärt oberoende är $P_{\mathcal{B}}$ ~~inverter~~ inverterbar och $P_{\mathcal{B}}^{-1} x = [x]_{\mathcal{B}}$

Sats (4.7.15) BASBYTE

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ vara baser för ett vektorrum V.

Då existerar en UNIK matris ($n \times n$) $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ så att:

$$[x]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [x]_{\mathcal{B}}$$

Denna matrisen ges av: $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \left[[b_1]_{\mathcal{C}} \ \ [b_2]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [b_n]_{\mathcal{C}} \right]$

dvs. kolonnerna i $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ ges av basvektorerna b_i i $\mathcal{C}$-kordinatvektor.

Matrisen $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ kallas BASBYTEMATRISEN från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$.

Det gäller att $\left(\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P}$

BASBYTE i $\mathbb{R}^n$

Om $V \in \mathbb{R}^n$ så gäller att $[c_1 \cdots c_n \mid b_1 \cdots b_n] \sim [I \mid \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}]$

och $[b_1 \cdots b_n \mid c_1 \cdots c_n] \sim [I \mid \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P}]$

Ex Låt $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $c_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

och $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ och $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ är två baser i $\mathbb{R}^2$?

Beräkna basbyte matriser $\underset{\mathcal{B}\leftarrow \mathcal{C}}{P}$ och $\underset{\mathcal{C}\leftarrow \mathcal{B}}{P}$

$\underset{\mathcal{B}\leftarrow \mathcal{C}}{P}$: radreducerar följande matris:

$$[b_1, b_2 \mid c_1 \ c] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ -3 & 4 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow \mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow \mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow \mathcal{C}}{P}^{-1} \Leftrightarrow \underset{\mathcal{C}\leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\cdot 4 - 6\cdot 3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3 & -5/2 \end{bmatrix}$$