TMV141   EGENVÄRDSPROBLEM

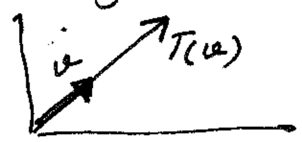
L12   - EGENVÄRDEN och EGENVEKTORER -

Def (av egenvektor och egenvärde för en linjär avbildning)
Låt V vara ett vektorrum och $T: V \Rightarrow V$ en linjär avbildning från V till V. Om det finns en nollskild vektor v och en skalär λ, så att: $T(v) = \lambda \cdot v$ (*)

då kallas v avbildningens egenvektor och talet λ kallas egenvärde till T.

OBS! Nollvektorn 0 godkänns alltså INTE som egenvektor till någon avbildning. Därmot talet 0 kan vara ett egenvärde till T: $T(v) = 0 \cdot v \Rightarrow T(v) = 0$

Geometrisk betyder (*) att egenvektorn v är parallell med sin bild $T(v)$



Def (av egenvektor och egenvärde för en kvadratisk matris n×n)
Låt A vara en n×n-matris. Om det finns en NOLLSKILD vektor v och en skalär λ så att:

$$Av = \lambda \cdot v$$

då kallas v matrisens EGENVEKTOR och talet λ kallas matrisens EGENVÄRDE.

OBS! Nollvektor kan inte bli egenvektor, men λ kan bli 0

$(\Leftarrow)$ $A \cdot v = 0 \cdot v \Rightarrow A \cdot v = 0$

Homogena ekv.-sys $Av = 0$ har icke-triviala lösningar o.m.m. $\det(A) = 0$ har vi att:

$\lambda = 0$ är ett EGENVÄRDE till A o.m.m. $\det(A) = 0$ //

Därför ~~följer~~ gäller följande ekvivalens:

$(\lambda = 0$ är ett egenvärde till$(A)) \Leftrightarrow (\det(A) = 0) \Leftrightarrow (A$ är INTE INVERTERBAR$)$

<u>Def</u> (EGENRUM E_λ)

Låt λ vara ett egenvärde till matrisen A av typ $n \times n$.

Underrummet $E_\lambda = Nul(A - \lambda I) = \{ v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)v = 0 \}$

kallas EGENRUMMET tillhörande λ.

(dvs. Om λ är ett egenvärde kallas mängden av alla lösningar till $(\lambda - \lambda \cdot I)x = 0$ för EGERUMMET till egenvärde λ.

$(= Nul(A - \lambda I))$)

Ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ kallas för den KARAKTERISTISKA EKVATIONEN

Polynomet $\det(A - \lambda I)$ kallas det KARAKTERISTISKA POLYNOMET.

<u>Sats</u> (5.1.2) Om $v_1, .., v_n$ är egenvektrer med respektiva egenvärden $\lambda_1 .., \lambda_n$ till $n \times n$-matris A så är mängd $\{v_1, .., v_n\}$ LINJÄRT OBEROENDE.

Sats (5.1.1) Egenvärden till en triangulär matris är digonal elementer.

<u>Bestämning</u> av egenvärden och egenvektrer

För att bestämma λ och v skriver vi:

$$A \cdot v = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

eller i matris form

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom $v \neq 0$ enligt definition, söker vi icke-triviala lösningar och de finns endast om $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det\begin{bmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda)\end{bmatrix} = 0$$

Efter utveckling av determinanten får vi ett polynom i vänster sidan som kallas det karakteristiska polynomet.
Och ekv $\det(A-\lambda I)=0$ är en algebraisk ekv. av grad n och kallas den karakteristiska ekv.

Steg 1 Vi löser först den karakteristiska ekv. $\det(A-\lambda I)=0$
och får eventuella reella egenvärden.

Steg 2 För varje reell lösning λ_k till ekv. $\det(A-\lambda I)=0$ substituerar vi $\lambda=\lambda_k$ i $(A-\lambda I)\cdot v=0$ och bestämmer motsvarande egenvektor.

<u>Ex</u> Bestäm egenvärden och egenvektorer av $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$.

Vi söker tal λ och vektor $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$: $Av=\lambda v$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

Karakteristiska polynomet $\det(A-\lambda I)$:

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-2\cdot 3 = \lambda^2-3\lambda-4$$

Karakteristiska ekv:

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0 \iff \underline{\lambda^2-3\lambda-4=0}$$

$$\lambda_{1/2}=\frac{+3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}=\frac{+3\pm 5}{2} \quad \begin{matrix}\lambda_1=4\\ \lambda_2=-1\end{matrix}$$

Egenvärden till matrisen A är $\lambda_1 = 4$ eller $\lambda_2 = -1$.

$\underline{\underline{\lambda_1 = 4}}$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3v_1 = 2v_2$$

$$v_1 = 2 \quad v_2 = 3$$

$\underline{\underline{v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$ är icke-noll egenvektor som tillhör till egenvärde $\lambda_1 = 4$

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = -v_2$$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är icke-noll egenvektor som tillhör till egenvärde $\lambda_2 = -1$

Matris A har 2 egenvärden $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -1$ och två motsvarande egenvektorer $v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.