LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONEN

EE

L1

Vi analyserar systemet som är AUTONOMT (= variabel är tid) och LINJÄRT, dvs
$f(t,x) = f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

I många tillämpade problem vi ser hur systemet utvecklas (förändra) i tid. Vi kan beskriva dessa förändringar med system av diff.ekv.:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$x_1 \dots x_n$ differentierbar funktioner av t

$x_1' \dots x_n'$ derivater

a_{ij} - reella konstanter

~~Viktigt~~ Viktigaste: Systemet är LINJÄRT!! (*)

Systemet är ekvivalent med den följande matris ~~ek~~ diff.ekv.

$$x'(t) = A \cdot x(t) \qquad (1)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

(*) Ek. (1) är linjär, sedan både differentierbar funktion och vektor multiplikation med matris är linjär avbildningar.

Om u och v är två lösningar av $x'(t) = Ax$, då är $c_1u + c_2v$ också en lösning: $(c_1u + c_2v)' = c_1u' + c_2v' = c_1Au + c_2Av$
$= A(c_1u + c_2v)$

Lösningarna u och v är inte unika, men om man fixerar BEGYNNELSVÄRDEN $x(0) = x_0$, då finns en entydig lösning.
(initial value)

OKOPPLADE EKVATIONER

Om A är diagonalmatris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, då blir ekvationerna OKOPPLADE

$$\begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 \\ x_2' = a_{22} x_2 \\ \vdots \\ x_n' = a_{nn} x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = c_1 e^{a_{11} t} \\ x_2 = c_2 e^{a_{22} t} \\ \vdots \\ x_n = c_n e^{a_{nn} t} \end{matrix} \qquad c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$$

Vi kan skriva den allmänna lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{a_{11} t} \\ \vdots \\ c_n e^{a_{nn} t} \end{bmatrix}$

Ex $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2 = -5x_2 \end{cases}$ har lösningar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Om $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 1$ $\Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$

DIAGONALISERING AV DYNAMISKA SYSTEM

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med n linjära oberoende egenvektorer $\Rightarrow A$ är diagonaliserbar till A

$A = PDP^{-1}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - egenvärdena till A
$v_1, \dots, v_n$ egenvektorer som utgör en bas

$P = [v_1, v_2 \dots v_n]$

Betrakta ekv.:

$x' = Ax \Leftrightarrow x' = \underbrace{PD^{-1}P}_{A} x$ $\qquad P^{-1} x' = \underbrace{P^{-1} P}_{I} \cdot D^{-1} \cdot P x \Rightarrow P^{-1} \cdot x' = D^{-1} P x$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(P^{-1} x) = D(P^{-1} \cdot x)$, $P^{-1} \cdot x = y$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} y = D \cdot y \Leftrightarrow y'(t) = Dy(t)$, D är diagonalmatris och vi har okopplad ekv.

lösningen: $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$, $c_i \in \mathbb{R}$

Eftersom $x = Py$ $\left(P^{-1} x = y, \ \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} x = P \cdot y \Rightarrow x = Py \right)$

$x = P \cdot y = [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
\vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = v_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_n c_n e^{\lambda_n t}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Konstanterna c_i beräknas genom att sätta $X(0) = X_0$

$\Leftrightarrow c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = X_0$

Vi ser att c_i är just koordinaterna av X_0 m.a.p (med avseende på) basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$

Exempel: Lös diff.ekv.systemet ~~$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$~~ $\begin{cases} x_1' = 8x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -10x_1 - 7x_2 \end{cases}$

$x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Vi diagonaliserar matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 3}, \boxed{\lambda_2 = -2}$ egenvärdena

$\lambda_1 = 3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow v_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ egenvektor

$\lambda_2 = -2 \quad \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1 \Rightarrow v_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ egenvektor

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

lösningen är: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 =$

$$= c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow x_1(t) = 3e^{3t} - 2e^{-2t}$$
$$x_2(t) = -3e^{3t} + 4e^{-2t}$$

Exempel 2 Låt $A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\1&3&-1\\-1&-2&2\end{bmatrix}$, bestäm lösningen till $x'=Ax$ som uppfyller $x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-1\\1&3-\lambda&-1\\-1&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left((3-\lambda)^2-4\right)=(1-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)$$
$$=(1-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Egenvärden: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$

Motsvarande egenvektorer:

$\lambda_1=\lambda_2=1$ $\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&-1\\-1&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$ $x_1+2x_2-x_3=0$ planet som spänns upp av $\begin{cases}v_1=(1,0,1)\\v_2=(2,-1,0)\end{cases}$

$\lambda_3=5$ $\begin{bmatrix}-3&2&-1\\1&-2&-1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&-4&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0\\-4x_2-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{matrix}$

$$\Rightarrow v_3=t\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A är diagonaliserbar

$$P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-1&-1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

Lösningen: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1e^t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2e^t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+c_3e^{5t}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2-c_3=1\\-c_2-c_3=1\\c_1+c_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=3/2\\c_2=-1/2\\c_3=-1/2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=\underbrace{\frac{3}{2}e^t-2\cdot\frac{1}{2}e^t}_{}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{5t}}_{}=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{5t}\\x_2=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{5t}\\x_3=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{5t}\end{matrix}$

eller

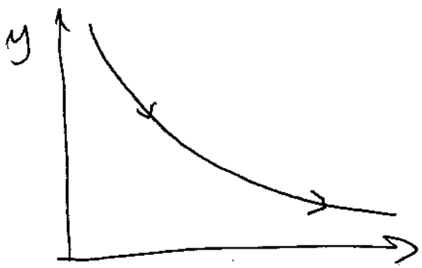
$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}=\frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}-\frac{e^{5t}}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_1(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{5t}}$; $\boxed{x_2(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{5t}}$, $\boxed{x_3(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{5t}}$

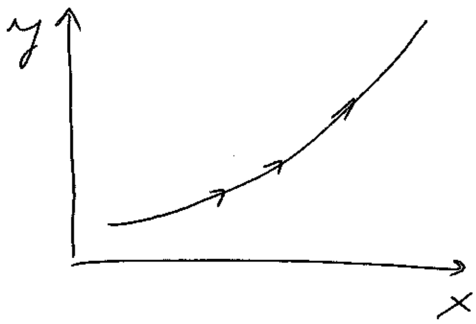
Systems beteende:

Reela egenvärden

$\forall \lambda_i < 0 \;,\; 1 \leq i \leq n$

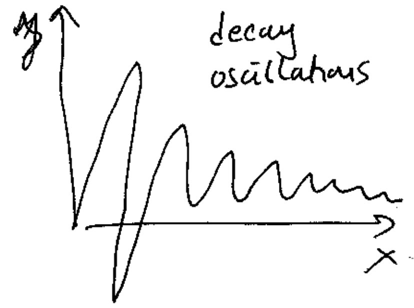


$\forall \lambda_i > 0 \;,\; 1 \leq i \leq n$

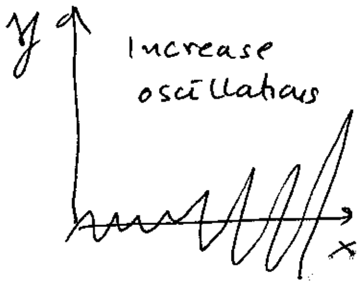


Complexa egenvärden

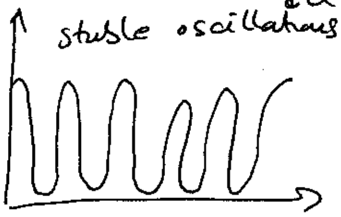
$\forall \lambda_i$ har "−" reella del



$\forall \lambda_i$ har "+" reella del

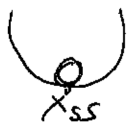


$\forall \lambda_i$ har 0 reelladel och icke 0 imaginary del



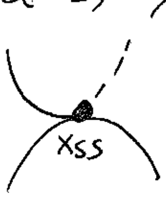
Stabilitet

1) $\forall \lambda_i < 0 \Rightarrow X_{ss}$ är STABILT



2) Om ingen av λ_i är noll och minst en har positivt reella del $\Rightarrow X_{ss}$ är OSTABILT

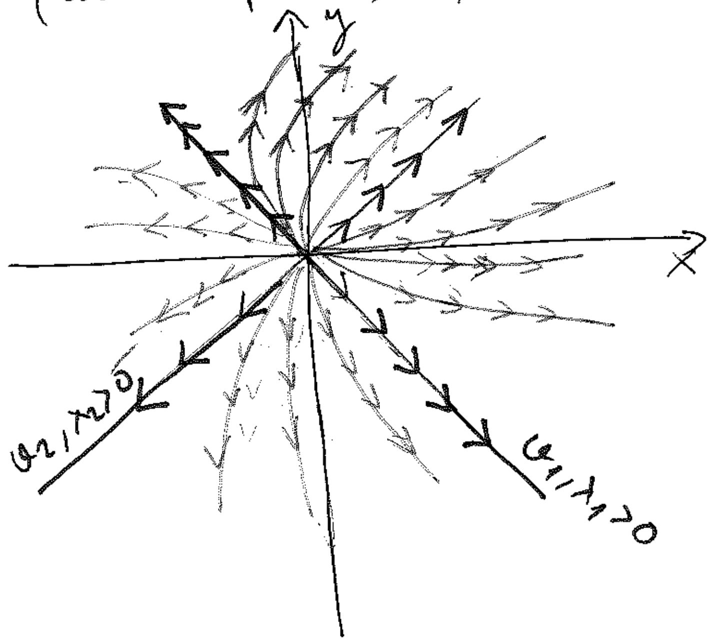
3) Om minst en egenvärde är 0 eller om visa är "<0" och ">0" X_{ss} kan bli både stabilt och ostabilt $\Rightarrow X_{ss}$ − SADELNPUNKT (SADDLE POINT)



Phase portrait

1° All eigenvalues have the same sign.

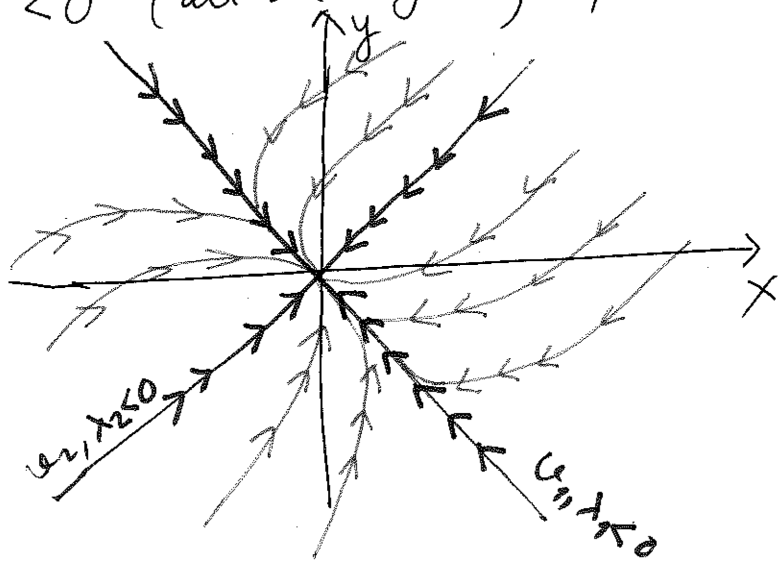
a) $\forall \lambda_i > 0$ (all are positive) : forces moving away from critical point.



· Eigenvector v_1 with eigenvalue $\lambda_1 > 0$

· Eigenvector v_2, with eigevalue $\lambda_2 > 0$

b) $\forall \lambda_i < 0$ (all are negativ) : forces moving towards critical point



2^0 Eigenvalues have oposit sign $\lambda_i < 0$, $\lambda_j > 0$

The trajectories given by the eigenvectors of the negative eigenvalue initilly start at infinite-distant away, move toward and eventually converge at the critical point.

The trayectories given by the eigenvectors of the positive eigevalue move ~~the~~ exactly the opposite way: they start at the crictical point then diverge to infinite-distant out.

Every othe trayectory starts at infinite-distant away, moves toward but never converges to the critical point, before changin direction and moves back to infinite-distant away.

This type of critical point is call a SADDLE POINT.

It is always UNSTABLE.