L 15

MARKOVKEDJA

Def Markovkedja är en diskret stokastisk process med diskret tid. Tillståndet för systemet vid tiden t+1 beror enbart på systemets tillstånd vid tiden t.

(

$X(t_i)=k$ betyder att processen är i tillstånd E_k vid tidpunkten $t=t_i$.
Mängden av alla möjliga tillstånd $\{E_k\}$ kallas tillståndsrummet

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$$

$$\left.\begin{array}{l} Pr\left[X(t_{n+1})=j \mid X(t_n)=i\right] \\ Pr\left[X_{t+1}=X_{t+1} \mid X_t=x_t\right] \end{array}\right\}$$

Övergångssannolikheten (transition probability) att systemet som är i tillstånden X_t vid tid t, befinner sig i X_{t+1} i tid $t+1$.

Markov process är MINNESLÖS !!!
– betyder att övergångssannolikheten beror endast av "nu-läge" dvs. situationen vid tidpunkten t_n och inte av vägen till detta tillstånd.

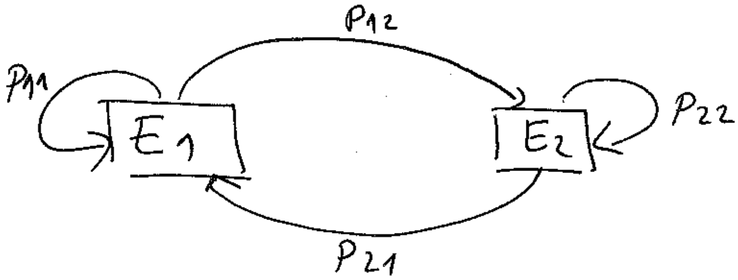
Övergångssannolikheten: $p_{ij} = Pr[E_i \to E_j) = P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i]$

P är övergångsmatrisen (transition probability matrix)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

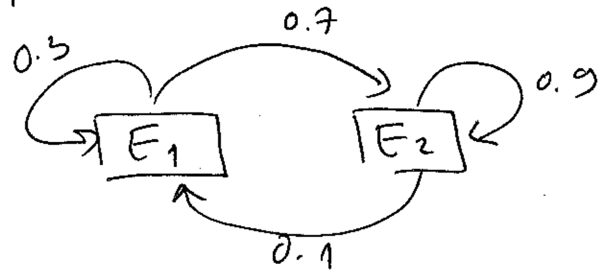
där $\sum_j p_{ij} = 1$ för $\forall i$
(dvs. summan av alla elementen i en rad är lika med 1)

Ett sätt att beskriva en Markovkedja är ~~att~~ använda en RIKTAD GRAF med övergångssannolikheterna.



Från grafen kan vi definiera matrisen: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

<u>Ex1</u>



$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$

<u>Absoluta sannolikheter</u>

Den absoluta sannolikheten att processen befinner sig i tillståndet E_i vid $t = t_n$ betecknas med $p_i(n)$

Altså $p_i(n) = P(X(t_n)) = i$

<u>Ex2</u> $p_2(4) = P(X(t_4)) = 2$ är sannolikheten att processen befinner sig i tillståndet E_2 vid $t = t_4$

$p_2(0)$ är sannolikheten att processen befinner sig i E_2 vid starttiden $t = 0$

<u>Sannolikhetsvektor</u>

Vid tiden $t = t_n$ befinner sig processen i ett av tillstånden $E_1, E_2, \dots$, med motsvarande sannolikheterna $p_1(n)$, $p_2(n) \dots$ som vi kan samla i en RADVEKTOR. Denna vektor kallar vi SANNOLIKHETSVEKTOR.

$\vec{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots)$

OBS! Summan av alla koordinater i en sannolikhetsvektor är lika med 1.

$\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0) \ldots)$ är en initial sannolikhetsvektor (start)
som visar att processen startar i E_1 med sannolikheten $p_1(0)$
i E_2 med sannolikheten $p_2(0)$....

Ex 3 $\vec{p}(0) = (0, 1, 0 \ldots)$ visar att processen startar i E_2, med sannolikhet 1.

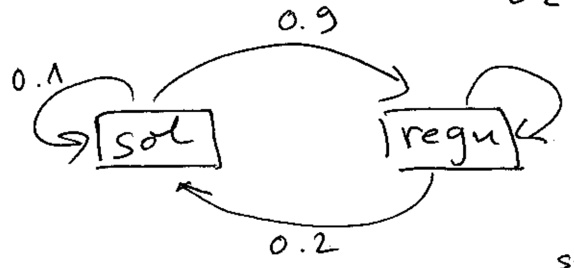
Relationer mellan $\vec{p}(n)$, $\vec{p}(0)$ och P:

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot P$$
$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot P = \vec{p}(0) P^2$$
$$\vec{p}(3) = \vec{p}(2) \cdot P = \vec{p}(0) P^3$$
$$\ldots$$
$$\vec{p}(n) = \vec{p}(n-1) P = \vec{p}(0) P^n$$

Vi kan studera en Markov kedja med hjälp av startvektorn $\vec{p}(0)$ och övergångsmatrisen P.

Ex 4. Vädret

2 olika tillstånd: E_1 – sol
E_2 – regn



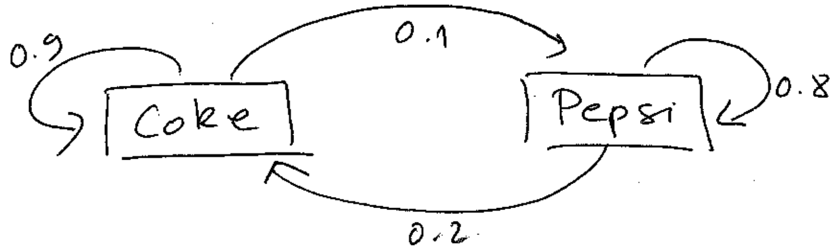
regn idag ⇒ 80% regn imorgon
20% sol imorgon

sol idag ⇒ 10% sol imorgon
90% regn imorgon

Övergångsmatris $P = \begin{array}{cc} \text{sol} & \text{regn} \\ \end{array}$
$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{sol} & \text{regn} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{sol} \\ \text{regn} \end{array}$$

Ex5 Coke vs Pepsi

Om en person köpte Cola sist, det är 90% sannolighet att nästa gången hen köper också Cola.
Om en person köpte Pepsi sist, det är 80% sannolighet att nästa gången hen köper också Pepsi.



$$P = \text{Från:}\ \begin{array}{c|cc} \text{Till} & \text{Coke} & \text{Pepsi} \\ \hline \text{coke} & 0.9 & 0.1 \\ \text{pepsi} & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

Om jag idag köper bara Pepsi, vad är för sannolighet att jag köper Coke 2 köp från idag?

Alt1

$$Pr[\text{Pepsi} \to X \to \text{Coke}] = Pr[\text{Pepsi} \Rightarrow \text{Pepsi} \Rightarrow \text{Coke}] + Pr[\text{Pepsi} \Rightarrow \text{Coke} \Rightarrow \text{Coke}] =$$

$$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 = \underline{\underline{0.34}}$$

34% sannolighet att jag köper Coke 2 köp från idag

Alt2

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{coke} & \text{pepsi} \end{array} \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ \underline{\underline{0.34}} & 0.66 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{coke} \\ \text{pepsi} \end{array}$$

Sannolighet att köpa ~~Pepsi~~ Coke 3 köp från idag?

$$P^3 = P \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ \underline{\underline{0.438}} & 0.562 \end{bmatrix}$$

Sannolighet att köpa Coke 3 köp från idag (och idag köper Pepsi) är $\underline{0.438}$

Sannolighet att köpa Pepsi 3 köp från idag (och idag köper Pepsi) är 0.562

Om varje person köper en dryck / vecka. Antar att 60% dricker Coke och 40% dricker Pepsi. Vad är antal personer som dricker Coke 3 veckor från idag?

$\vec{p}(0) = (0.6, 0.4)$ → start vektor

p 3 veckor från idag

$$\vec{p}(3) = \vec{p}(0)\, P^3 = (0.6, 0.4)\begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.433 & 0.562 \end{bmatrix} = (0.6438, 0.3562)$$

≈ 2/3 dricker Coke efter 3 veckor