TMV141

SKALÄR PRODUKT och ORTONORMERADE BASER

L16

u och v är vektorer i $\mathbb{R}^n$, u och v är $n \times 1$ matriser.

u^T är $1 \times n$ matris, och produkt $u^T \cdot v$ är 1×1 matris = skalär.

$u^T \cdot v$ är SKALÄR PRODUKT av u och v och vi kan skriva också $u \cdot v$.

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ skalärprodukt av u och v är

$$[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots u_n v_n$$

Ex $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $u \cdot v = ?$ $v \cdot u = ?$

$$u \cdot v = u^T \cdot v = [2 \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-5)(2) + (-1) \cdot (-3)$$
$$= -1$$
$$v \cdot u = v^T \cdot u = [3 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + (-3)(-1)$$
$$= -1$$

Sats 6.1.1 Låt u, v, w vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c är skalär. Då gäller:

(1) $u \cdot v = v \cdot u$
(2) $(u+v)w = uw + vw$
(3) $(cu)v = c(u \cdot v) = u(c \cdot v)$
(4) $u \cdot u \geq 0$ och $u \cdot u = 0$ omm $u = 0$

(2), (3) $\Rightarrow$ $(c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) w = c_1 (u_1 w) + \dots + c_p (u_p \cdot w)$

NORM och AVSTÅND

Norm (längd) av en vektor v är skalären $\|v\|$ som definieras av: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$, $\|v\|^2 = v \cdot v$

En ENHETSVEKTOR eller NORMERAD vektor är en vektor u sådan att $\|u\| = 1$

Som en följd av detta kan vi definiera AVSTÅNDET $\text{dist}(u,v)$ mellan två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ som normen av skillnaden mellan dessa, dvs.:

$$\text{dist}(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}$$

Det gäller att $\|cu\| = |c|\,\|u\|$

$$\|c\cdot u\|^2 = (cu)^T(cu) = c^2(u^Tu) = c^2\|u\|^2$$

Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ORTOGONALA om $u \cdot v = 0$

Begreppet ortogonalitet är en generalisering av vinkelräthet.

Vi kan definiera vinklar i $\mathbb{R}^n$ genom formeln:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cdot \cos(\alpha)$$, $\alpha \in [0, \pi]$ är vinkeln mellan u och v

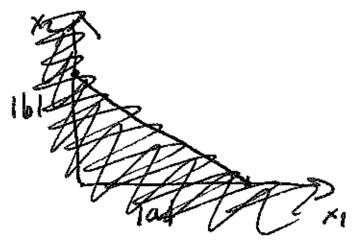
om vektorerna är ortogonala $\alpha = 90°$ $(\pi/2) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u \cdot v = 0$ //

PYTHAGORAS SATS: Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}$ är ortogonala o.m.m.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

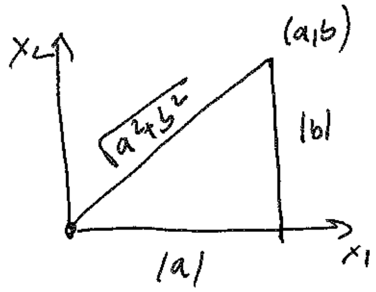
Bevis $\|u+v\|^2 = (u+v)(u+v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$$



u och v är ortogonala $\Rightarrow u \cdot v = 0 = 2u \cdot v = 0$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Ex $\text{dist}(u,v) = ?$ $u = (7,1)$, $v = (3,2)$

$$u - v = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dist}(u-v) = \|u-v\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

ORTOGONALA KOMPLEMENT

__Def__ (Ortogonalt komplement)

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Då betecknar vi med $W^\perp$ det <u>ortogonala komplementet</u> till W, dvs. mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot varje vektor i W dvs.

$$W^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot w = 0 \text{ för alla } w \in W \}$$

__Viktig__: a) $x \in W^\perp$ omm x är ortogonala mot alla vektorer i mängden som spänner upp W

b) $W^\perp$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

c) $(W^\perp)^\perp = W$

__Sats 6.1.3__ Låt A vara en $m \times n$ matris. Då gäller:

$$\begin{cases} (\mathrm{Row}(A))^\perp = \mathrm{Nul}(A) \\ (\mathrm{Col}(A))^\perp = \mathrm{Nul}(A^T) \end{cases}$$

Bra att veta: $\dim W + \dim W^\perp = m$

$$\left(= \dim \mathrm{Col}(A) + \dim \mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{rank}(A^T) + \dim \mathrm{Nul}(A^T) \right)$$

ORTOGONAL MÄNGD

__Def__ En ~~mägd~~ mängd $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ORTOGONAL MÄNGD om $u_i \cdot u_j = 0$ för alla $i \neq j$.

__Sats 6.2.4__ Varje ortogonal mängd i $\mathbb{R}^n$ som inte innehåller nollvektorn är linjärt oberoende.

Om $0 = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p \Rightarrow 0 = 0 \cdot u_1 \Rightarrow 0 = (c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p) u_1 = c_1 (u_1 u_1) + c_2 (u_2 u_1) + \ldots + c_p (u_p u_1) = c_1 (u_1 u_1)$ sedan u_1 är ortogonal mot $u_2 \ldots u_p$. $\Rightarrow c_1 = 0$ similary $c_2 = \ldots$ $\Rightarrow S$ is linearly independent

ORTOGONALA BASER

__Def.__ En ortogonal bas $\mathcal{B}$ för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd.

Sats 6.2.5 Om $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ är en ortogonal bas för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ så gäller att varje vektor $y \in W$ kan skrivas som:

$$y = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p \quad \text{där} \quad c_j = \frac{y \cdot u_j}{\|u_j\|^2}$$

(om $\|u_j\| = 1 \Rightarrow c_j = y \cdot u_j$)

Ex Beskriva vektor $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ som linjär kombination av vektorer i $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -7/2 \end{bmatrix}$

$y u_1 = 11 \qquad y u_2 = -12 \qquad y u_3 = -33$

$u_1 u_1 = 11 \qquad u_2 u_2 = 6 \qquad u_3 u_3 = 33/2$

$$y = \overset{c_1}{\frac{y u_1}{u_1 u_1}} \cdot u_1 + \frac{y u_2}{u_2 u_2} u_2 + \frac{y u_3}{u_3 u_3} u_3$$

$$= \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 + \frac{-33}{33/2} u_3$$

$$= \underline{u_1 - 2u_2 - 2u_3}$$

ORTONORMALA MÄNGDER och BASER

En enhetsvektor u är en vektor med längden 1, dvs $\|u\| = 1$. En ORTONORMAL MÄNGD (ON-mängd) är en ortogonal mängd där alla element är enhetsvektorer.

En ORTONORMAL BAS (ON-bas) för ett underrum $W \in \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ~~ortonormal~~ ON mängd. En ON-bas är alltså en ortogonal bas.

Ex Visa att $\{v_1, v_2, v_3\}$ är ON-bas av $\mathbb{R}^3$. $v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= -3/\sqrt{66} + 2\sqrt{66} + 1/\sqrt{66} = 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= -3/\sqrt{726} - 4/\sqrt{726} + 7/\sqrt{726} = 0 \\ v_2\, v_3 &= 1/\sqrt{396} - 8/\sqrt{396} + 7/\sqrt{396} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ är ortogonal mängd (1)}$$

$$\begin{rcases} u_1 u_1 = 9/11 + 1/11 + 1/11 = 1 \\ u_2 u_2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1 \\ u_3 u_3 = 1/66 + 16/66 + 49/66 = 1 \end{rcases} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \text{ är enhetsvektorer (2)}$$

(1) och (2) $\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ är ON-mängd $\Rightarrow$ vektorer är linjär oberoende $\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$.

__Sats__ 6.2.6 Låt U vara $m \times n$-matris, då är $U^T U = I$ o.m.m U:s kolonnerna är ORTONORMALA

__Sats__ 6.2.7 Låt U vara $m \times n$-matris med ortonormala kolonner och x, y vara vektorer i $\mathbb{R}^n$, då gäller

1° $\|U \cdot x\| = \|x\|$

2° $(U \cdot x)(U \cdot y) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

3° $(U \cdot x)(U \cdot y) = 0$ o.m.m $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Linjära avbildning $x \to U \cdot x$ bibehåller (bevarar) längd och ortogonalitet

Ex $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$

U har ~~o~~ ortonormala kolonner $\Rightarrow U^T U = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|U \cdot x\| = \|x\|$

$$\|x\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$$

$$\|U \cdot x\| = \left\| \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

$\Rightarrow \|U \cdot x\| = \|x\|$

$\Rightarrow$ __Def__ __Ortogonala__ matriser: En kvadratisk matris A kallas ortogonal om $A^T = A^{-1}$ dvs. $A^T A = I$, A:s kolonner är ortonormala och A:s rader är också ortonormala