

TMV141 L17 ORTOGONAL PROJEKTION och ORTOGONALA MATRISER

Repetition:

En mängd $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ORTOGONAL MÄNGD om $u_i \cdot u_j = 0$, för alla $i \neq j$

En ORTOGONAL BAS B för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortogonal mängd.

En ORTONORMAL MÄNGD är en ortogonal mängd där alla element är enhetsvektorer ($\|u_i\| = 1$).

En ORTONORMAL BAS för ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ är en bas som också är en ortonormal mängd.

Sats 6.2.6 Låt U vara $m \times n$ -matris, då är $U^T U = I$ om och endast om U 's kolonner är ortonormala.

⊕ se sidan 19

Sats 6.2.7 Om $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har ortonormala kolonner och $x, y \in \mathbb{R}^n$ så gäller att:

- a) $\|Ux\| = \|x\|$
- b) $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
- c) $(Ux) \perp (Uy) = 0$ om och endast om $x \cdot y = 0$

Sats 6.3.8 (Satsen om ortogonal uppdelning)

Låt W vara ett underrum till \mathbb{R}^n och låt $y \in \mathbb{R}^n$:

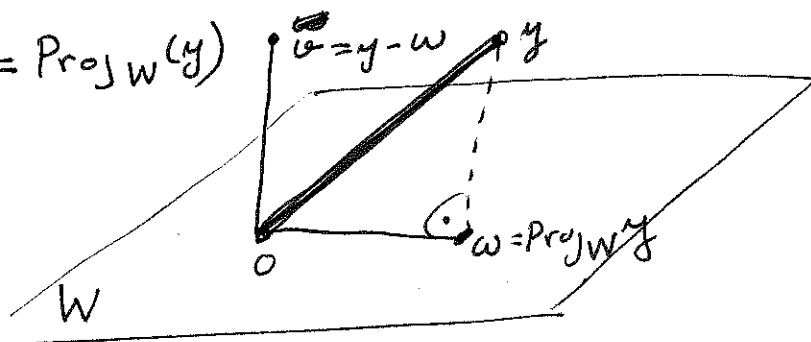
- Det finns en UNIK representation $y = w + v$, $w \in W$ och $v \in W^\perp$.
- Om $\{u_1, \dots, u_p\}$ är en ortogonal bas för W så gäller att:

$$w = \frac{y \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{\|u_p\|^2} \cdot u_p$$

och $v = y - w$.

Vektorn w är den ORTOGONALA PROJEKTIONEN av y på W :

$$w = \text{Proj}_W(y)$$



Ex Låt $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\{u_1, u_2\}$ är en ortogonal bas för $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$. Beskriva y som en summa av vektorer i W och en vektor som är ortogonal ~~til~~ på W .

Ortogonalprojektion av y på W :

$$w = \frac{y \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{y \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2$$

$$y \cdot u_1 = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 9$$

$$u_1 \cdot u_1 = [2 \ 5 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 30$$

$$y \cdot u_2 = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$u_2 \cdot u_2 = [-2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$$

$$w = \frac{9}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$v = y - w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix} \quad v \text{ är } W^\perp$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

Sats 6.5.9 Låt W vara ett underrum till \mathbb{R}^n och låt $y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att den ortogonalprojektion w av y på W , $w = \text{Proj}_W(y)$, är den vektor i W som ligger närmast y :
 $\|y - w\| \leq \|y - v\|$ för alla vektorer $v \in W$.

Ex $y = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Beräkna ^{avstånd} distance från y till ~~$W = \text{span}\{u_1, u_2\}$~~ $W = \text{span}\{u_1, u_2\}$

svare

$$w = \frac{y \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$y \cdot u_1 = [-1 \ -5 \ 10] \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 15$$

$$u_1 \cdot u_1 = [5 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 30$$

$$y \cdot u_2 = [-1 \ -5 \ 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -21$$

$$u_2 \cdot u_2 = [1 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 6$$

$$w = \frac{15}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-21}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v = y - w = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\|y - w\|^2 = \|v\|^2 = v \cdot v = [0 \ 3 \ 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 45$$

$$\text{dist}(y, W) = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Note: ^{avstånd} Distance från $y \in \mathbb{R}^n$ till underutrum W är ^{avstånd} distance från y till den närmaste punkten i W till y .

Sats 6.5.10 Antag att $\{u_1, \dots, u_p\}$ är en ON-bas för ett underutrum $W \subset \mathbb{R}^n$ och ett $U = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \text{Proj}_W(y) &= UU^T y \\ &= (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \dots + (y \cdot u_p)u_p \end{aligned}$$

för alla $y \in \mathbb{R}^n$.

Efter satsen 6.26 vi ska definera ORTOGONAL matris:

Def En kvadratisk matris $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas ORTOGONAL om
 $U^{-1} = U^T$

En $n \times n$ matris d'r ORTOGONAL om den har ortonor-
 rade kolonner (\Leftrightarrow kolonner ~~en~~ bildar en ON-bas i \mathbb{R}^n).

GRAM-SCHMIDTS ORTOGONALISERINGSMETOD

Sats 6.4.11 (Gram-Schmidt)

låt W vara ett underrum i \mathbb{R}^n . Då har W en ON-bas.
 låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara en bas för W . Sätt:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &\vdots \\ v_p &= u_p - \frac{u_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \dots - \frac{u_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1} \end{aligned}$$

Då är $\{v_1, \dots, v_p\}$ en ortogonal bas för W och

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\}, \quad 1 \leq k \leq p$$

Ex $\{u_1, u_2, u_3\}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 " bas för W

Beräkna ortogonal bas av W :

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{[1 \ 2 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1 \ 2 \ 3 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{5}{14} = \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u_3 = u_3 - \frac{u_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$u_3 u_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_1 u_1 = 14$$

$$u_3 u_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = 9/14$$

$$u_2 u_2 = [9/14 \ 9/7 \ -15/14 \ 0] \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{630}{196}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{9/14}{\frac{630}{196}} \right) \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/14 \\ 9/7 \\ -15/14 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$