TMV143 SYMMETRISKA MATRISER

L19

Def (Symmetriska matrise~~r~~)

En kvadratisk matris kallas symmetrisk o.m.m $A^T = A$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Def (Ortogonal matris)

En kvadratisk matris kallas ~~og~~ ortogonal o.m.m $A^T = A^{-1}$

dvs $A^TA = AA^T = I$

Sats 7.1.1 ~~Om A~~

Låt A vara symmetrisk matris, då två egenvektorer från olika egenrum är ortogonala.

$$\lambda_1 u_1 u_2 = (\lambda_1 u_1)^T u_2 = (Au_1)^T u_2 = (u_1^T A^T) u_2 = u_1^T (A u_2) =$$

$$= u_1^T (\lambda_2 u_2)$$

$$= \lambda_2 u_1^T u_2 = \lambda_2 u_1 u_2$$

$$\lambda_1 u_1 u_2 - \lambda_2 u_1 u_2 = 0 \iff \underset{\overset{\#}{0}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} u_1 u_2 = 0 \implies u_1 u_2 = 0$$

Sats 7.1.2

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A är ORTOGONAL DIAGONALISERBAR o.m.m A är symmetrisk

Det finns en ortogonal matris P och en diagonal matris D sådan att $A = PDP^{-1} = PDP^T$

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

Matris A måst ha ~~k~~ n linjär oberoende och ortonormal egenvektorer.

Ex. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ Bestäm en ortogonal matris P som diagonaliserar A

Vi bestämmer egenvärden, egen-vektorer och därefter ortonormerar vektorer

Egenvärden:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1/4 = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1/4$$

$$\Rightarrow 1-\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3/2 \quad \lambda_2 = 1/2}$$

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 3/2$

$$-1/2 x_1 + 1/2 x_2 = 0$$
$$1/2 x_1 - 1/2 x_2 = 0$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1/2$

$$\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0$$
$$\frac{1}{2} x_1 + 1/2 x_2 = 0$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Är v_1 och v_2 ortogonala?

$$v_1 \cdot v_2 = [1, 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

v_1 och v_2 är ortogonala.

Vi normerar vektorer och bildar P

$$u_1 = \frac{1}{|u_1|} u_1 \qquad u_2 = \frac{1}{|u_2|} u_2$$

$$\|u_1\|^2 = u_1 u_1 = [1 \; 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \qquad |u_1| = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\|u_2\|^2 = u_2 \cdot u_2 = [1 \; -1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \qquad |u_2| = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En ortogonal matris som diagonaliserar A dvs uppfyller

$$A = PDP^{-1} = PDP^T \quad : \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ex Diagonalisera den symmetriska matrisen $A=\begin{bmatrix}3&-2&4\\-2&6&2\\4&2&3\end{bmatrix}$

Egenvärdena:

$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-2&4\\-2&6-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow (\lambda-7)^2(\lambda+2)=0 \quad \lambda_1=\lambda_2=7, \quad \lambda_3=-2$$

Egenvektorer

$\lambda_1=\lambda_2=7$ $\quad v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad v_1\cdot v_2=-\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow$ inte ortogonala

Ortogonalisera v_1 och v_2 (Gram-Schmidt)

$$z_1=v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$z_2=v_2-\frac{v_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1}v_1=\begin{bmatrix}-1/4\\1\\1/4\end{bmatrix}$$

$\{z_1, z_2\}$ är ortogonala.

Normera z_1 och z_2: $\quad \bar{z}_1=\frac{z_1}{|z_1|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}, \bar{z}_2=\frac{z_2}{|z_2|}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{18}\\4/\sqrt{18}\\1/\sqrt{18}\end{bmatrix}$

$\lambda_3=-2$ $\quad v_3=\begin{bmatrix}-1\\-1/2\\1\end{bmatrix}$, normera v_3 $\quad \bar{v}_3=\begin{bmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{bmatrix} \left(=\frac{v_3}{|v_3|}\right)$

ON-bas för $\mathbb{R}^3$: $\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{v}_3\}$ som ger oss matrisen.

$$P=[\bar{z}_1\ \bar{z}_2\ \bar{v}_3]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{18}&-2/3\\0&4/\sqrt{18}&-1/3\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{18}&2/3\end{bmatrix}$$

och $A=PDP^T$ där $D=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

Sats 7.1.3 (Spectral Theorem / Sats)

Mängd av alla matrisens egenvärde kallas SPECTRUM av A.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk matris, då:

a) A har n reella egenvärden

b) ~~Eg~~ Olika egenrum är ortogonala mot varandra
egenvektorer från olika egenrum är ortogonal

c) A är ~~ortog~~ ortogonal diagonaliserbar

d) dimension av egenrum för varje egenvärde λ är multiplicitet av λ

Spectral Decomposition

Låt $A = \cancel{\ldots} \cdot PDP^{-1}$, kolumner av P är ortonormal egenvektorer $u_1, \ldots, u_n$ av A med motsvarande egenvärde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ som är diagonal elementen i diagonal matris D. Sedan $P^{-1} = P$

$$\Rightarrow A = PDP^T = [u_1 \ldots u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & - & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1 u_1 \ldots \lambda_n u_n] \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T$$ (spectral decomposition av A)

$$(\Rightarrow A = \cancel{\sum \lambda_i g_i g_i^T} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T = P \Lambda P^T$$

KVADRATISKA FORMER

Def. (av en kvadratisk form)

En kvadratisk form är ett uttryck av typ: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

en avbildning $Q(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Q(x) = X^TAX$, $A^{n\times n}$ symm.

A-matris av kvadratisk form

Några exempel av kvadratiska former:

$$Q_1 = 4x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$$

$$Q_2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$Q_3 = 5xy + y^2$$

MATRISBESKRIVNING AV KVADRATISKA FORMER

En kvadratisk form $Q(x_1, .., x_n)$ kan beskrivas på följande sätt: $Q = X^TAX$ där $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och A är en symmetrisk matris.

Ex

① Låt $Q = ax^2 + bxy + cy^2$

Vi bildar A på följande sätt:

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

då gäller $Q = [x\ y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

② Låt $Q = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$

Vi bildar A på följande sätt.

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

Vi delar med 2 koefficienterna för blandade termer och skriver de symmetriskt i A.

då gäller $Q = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

DIAGONALISERING AV KVADRATISKA FORMER

Låt Q vara en kvadratisk form och A tillhörande symmetriska matris: $Q = X^T A X$ (1)

Den symmetriska matrisen A kan vi ortogonal diagonalisera.

Låt P vara den ortogonala matrisen (som består av matrisens ortonormerade egenvektorer) som diagonaliserar A.

Då gäller: $A = PDP^{-1}$

Eftersom P är en ortogonal matris gäller det $P^{-1} = P^T$ och därför $A = PDP^T$ (2)

Om vi samtidigt betraktar basbyte från standardbasen till basen som består av de ortonormerade egenvektorer (kolumner i P) då har vi följande samband:

$$X = PY \quad (3)$$

mellan gamla koordinater $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och nya koordinater $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Om vi nu substituerar (2) och (3) i (1) får vi:

$$Q = (PY)^T PDP^T (PY)$$

$$\Leftrightarrow Q = Y^T P^T P D P^T P Y \Rightarrow (\text{eftersom } P^T P = I)$$

$$\Leftrightarrow Q = Y^T D Y$$

$$Q = [y_1\ y_2 \cdots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad (4)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är egenvärden till matrisen A.

Alltså, med hjälp av substitutionen $X = PY$ och nya variabler $y_1, y_2, \ldots y_n$ har vi skrivit om Q så att blandade term har försvunnit och endast rena kvadratiska termer kan finnas kvar i uttrycket.

När Q skrivs som i (4), säger vi att vi har DIAGONALISERAT den kvadratiska formen Q genom substitutionen $X=PY$.

<u>Ex</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Vi diagonaliserar A och konstruerar en ON-bas av egenvektorer.

Egenvärden är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -7$ och motsvarande egenvektorer är $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$u_1 = \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1 \qquad u_2 = \frac{1}{|v_2|} v_2$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ som är automatiskt ortogonala.

$\{u_1, u_2\}$ är en ON-bas i $\mathbb{R}^2$ och $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ortogonal.

Vi har $A = PDP^T \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

$$\bar{x} = P\bar{y} \Rightarrow Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T D \bar{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$Q(\bar{x}) = 3y_1^2 - 7y_2^2 \blacksquare$$

<u>Def</u> En kvadratisk form kallas POSITIVT DEFINT om

$$Q(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \neq 0$$

Den är <u>negativt definit</u> om $Q(\bar{x}) < 0, \ \forall \bar{x} \neq 0$

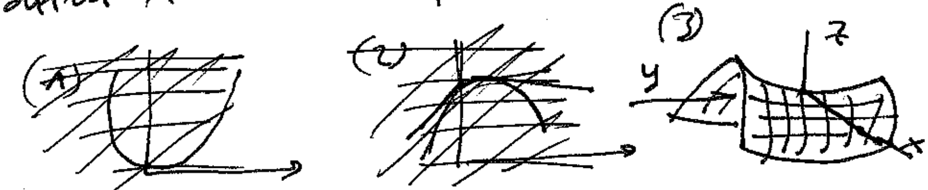
Den är EJ DEFINIT om Q har både positiva och negativa värden.

Sats 7.2.5

1) $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ är positivt definit omm alla λ_i är positiva

(2) Q är negativt definit omm alla λ_i är negativa

(3) Q är ej definit (INDEFINIT) omm A har både positiva och negativa egenvärden.



Ex. Visa att $Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2$ är ej definit.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Egenvärden:

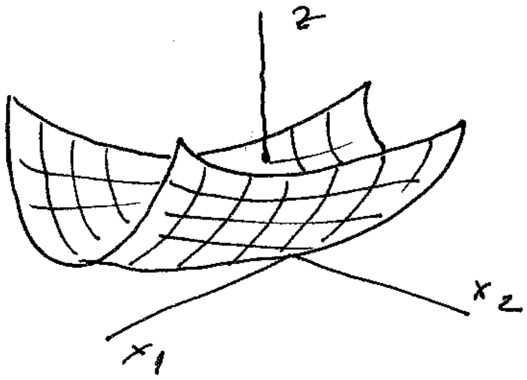
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda) - (-4)(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

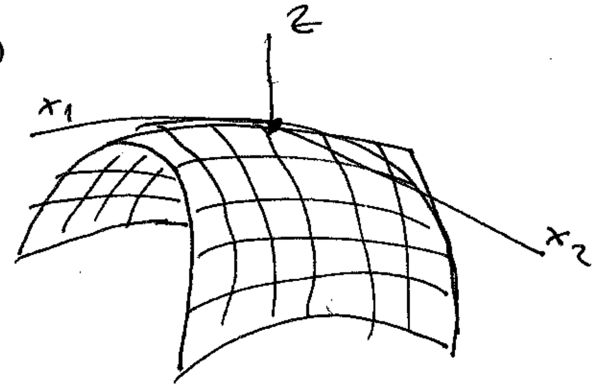
$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -7 \end{cases}$$

A har både positiva och negativa egenvärden $\Rightarrow$ Q är ej definit.

(1)



(2)



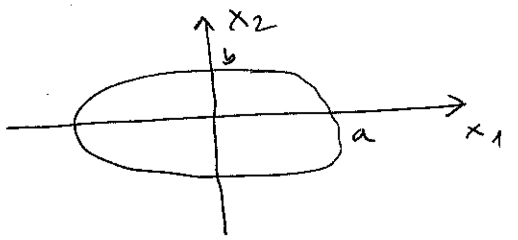
(4) positivt semidefinit o.m.m $\lambda_{min} = 0$

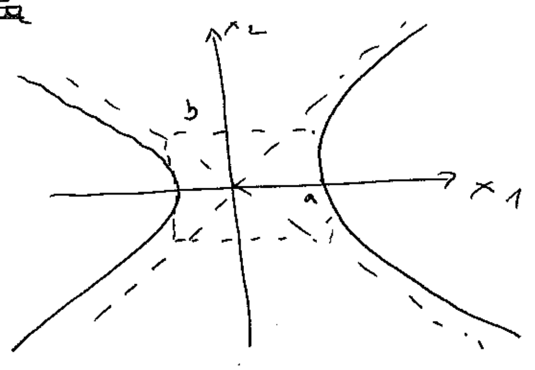
(5) negativt semidefinit o.m.m $\lambda_{max} = 0$

Diagonalisering av kvadratiska former (basbyte $x = Py$) $P^{-1} = P^T$

$y = P^{-1}x = P^T x$

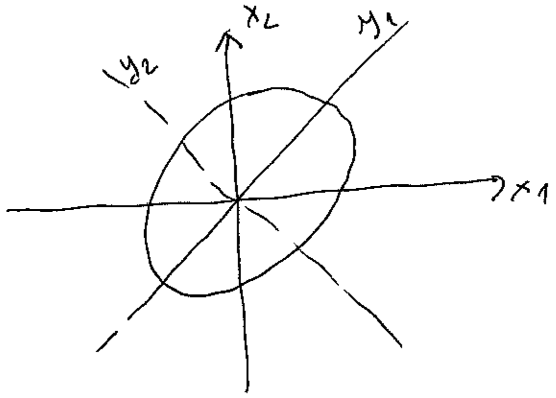
The Principle Axes ~~Theorem~~

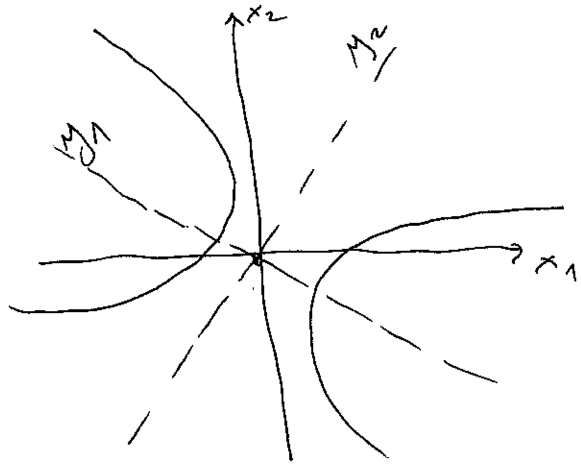




Standard position

~~Effekt från basbyte~~





not in standard position

+ y_1 is direction of the ~~first~~ first column in P

+ y_2 is direction off the second column in P

Värdemängden till en kvadratisk form

Låt $Q(X) = X^T A X$, A är symmetrisk, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och

låt λ_{min} och λ_{max} vara minsta respektive största egenvärden till A. Då gäller:

$$\lambda_{min} |X|^2 \leq Q(X) \leq \lambda_{max} |X|^2$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \lambda_{min} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq Q(X) \leq \lambda_{max} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$Q(X) = Q(PY) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, eftersom $\lambda_{min} \leq \lambda_n < \lambda_{max}$

$$\lambda_{min} (y_1^2 + y_2^2 + \dots y_n^2) \leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_{max} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

$$\lambda_{min} |Y|^2 \leq Q(X) \leq \lambda_{max} |Y|^2$$

P är ortogonal matris $\quad X = PY \quad |X| = |PY| = |Y|$

Ex Bestäm max och min av $Q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 2y^2$ om x, y satisfierar ~~villa~~ villkoret $x^2 + y^2 = 8$.

Symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1$

$$Q(x,y) = [x \; y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{min} |X|^2 \leq Q \leq \lambda_{max} |X|^2$$

$$\lambda_{min} (x^2 + y^2) \leq Q \leq \lambda_{max} (x^2 + y^2)$$

$$-1 \cdot 8 \leq Q \leq 5 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad -8 \leq Q \leq 40$$

$Q_{min} = -8$
$Q_{max} = 40$