TMV 141

L3

LINJÄRT BEROENDE och OBEROENDE

Def: Låt $u_1, \dots, u_p$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. De sägs vara LINJÄRT OBEROENDE omm. vektorekv. $x_1u_1 + \dots + \cancel{\ } x_pu_p = 0$ endast har trivial lösning.

Vektorer $u_1, \dots, u_p$ är LINJÄRT BEROENDE o.m.m. vektorekv. $x_1u_1 + \dots + x_pu_p = 0$ har också en icke-trivial lösning.

Sats 1.7.7 En mängd som består av två eller fler vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ är linjärt beroende o.m.m. minst en av vektorerna är en linjärkombination av de övriga.

Ex1 Är följande tre vektorer linjärt oberoende?

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enligt definitionen, vektorerna u, v, w är oberoende omm ekv. $xu + yv + zw = 0$ har endast den triviala lösningen $x=0,\ y=0,\ z=0$.

$$x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ y + z = 0 \\ y = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

Altså har ekv. endast den triviala lösningen $x=0,\ y=0,\ z=0$ och därför är vektorerna u, v, w oberoende.

LINJÄRA AVBILDNINGAR

En AVBILDNING (funktion elle transformation) T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som tilldelar en unik vektor $y = T(x) \in \mathbb{R}^m$ till varje element $x \in \mathbb{R}^n$.

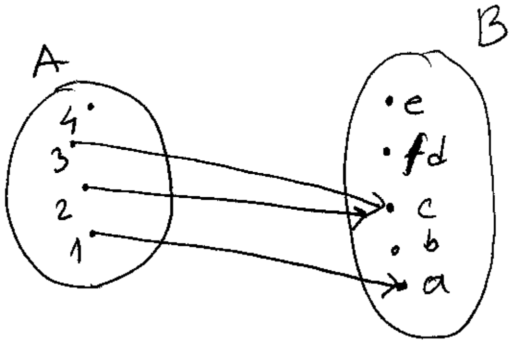
Mängden $\mathbb{R}^n$ kallas DOMÄN (~~definitions~~ start mängd) dom (T)

Mängden $\mathbb{R}^m$ kallas KODOMÄN (mål mängd)

Mängden av alla bilder under T kallas värdemängd.

Vektor $y=T(x)$ sägs vara BILDEN av X under T.

Ex2



$A = \{1,2,3,4\}$ - DOMÄN

$B = \{a,b,c,d,e\}$ - KODOMÄN

$f : A \Rightarrow B$

Definitionsmängd $D_f = \{1,2,3\}$

värdemängd (RANGE) $V_f = \{a,c\}$

Det En avbildning T säges vara linjär om:

1) $T(u+v) = T(u)+T(v)$, för varje $\forall u,v \in \text{dom}(T)$

2) $T(cu) = cT(u)$, $\forall \in \text{dom}(T)$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$$T(0) = 0$$

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

Sats 1.9.10 Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då existerar en unik matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så att:

$$T(x) = Ax, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Om e_j är den j:te kolonnen i enhetsmatrisen I_n och $a_j = T(e_j)$ så är $A = [a_1, \ldots, a_n]$. Matrise A kallas för standardmatrisen för avbildningT.

Def En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ säges vara SURJEKTIV om varje $y \in \mathbb{R}^m$ är bilden av minst en vektor $x \in \mathbb{R}^n$

Def En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ säges vara INJEKTIV om varje $y \in \mathbb{R}^m$ är bilden av högst en vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

Def En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ säges vara BIJEKTIV om den är både injektiv och surjektiv.

Sats 1.9.11 Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är T injektiv o.m.m. $T(x)=0$ har endast en trivial lösning.

Mängden $\{x : T(x)=0\}$ kallas KÄRNAN (NOLLRUMMET) (eng: KERNEL) till T ($\ker(T)$, $Nul(T)$).

Alltså, T är injektiv omm $\ker(T)=0$

Sats 1.9.12 Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T. Då gäller att:

(1) T är surjektiv omm kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$

(2) T är injektiv omm kolonnerna i A är linjärt oberoende