TMV141
L6

Inversa matriser

Def Låt A vara en kvadratisk matris av typ $n \times n$. Matrisen A är INVERTERBAR om det finns en kvadratisk matris $B(n \times n)$ sådan att: $AB = BA = I$

där I är ENHETSMATRISEN $n \times n$.

(Enhetsmatrisen är en kvadratisk matris där alla diagonalel. är ettor och alla element utanför diagonalen är nollor)

En sådan matris B kallas en INVERS MATRIS till A. Den inversa matrisen betecknas med A^{-1}.
Alltså, om matrisen A har inversen A^{-1} då gäller:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad \text{och} \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Sats (om inverterbara matriser)
En matris A är inverterbar o.m.m $\det(A) \neq 0$.

Sats (2.2.5) Om en kvadratisk $n \times n$-matris A är inverterbar så har ekv.sys. $Ax = b$ ~~en~~ entydig lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$. lösningen ges av $x = A^{-1}b$.

Sats (2.2.6) 1) Om A är inverterbar så är A^{-1} och $(A^{-1})^{-1} = A$
2) Om A och B är $n \times n$ inverterbara matriser så är AB och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ OBS! Notera ordningen!!!
3) Om A är inverterbar så är A^T och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Sats (2.3.8) Sats om inverterbara matriser
Låt A vara en kvadratisk matris $n \times n$. Följande påstående är ekvivalenta:
1) A är inverterbar
2) A är radekvivalent med identitets matris I_n
3) A har n pivot positioner
4) Ekvationen $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen

5) A:s kolonner är linjärt oberoende
6) Den linjära avbildningen $x \to Ax$ är injektiv
7) Ekvationen $Ax = b$ har minst en lösning för varje $b \in R^n$; $x = A^{-1}B$
8) A:s kolumner spänner upp R^n
9) Den linjära avbildningen $x \to Ax$ avbildar R^n på R^n
10) Det finns en $n \times n$ matris C sådant att $CA = I$
11) Det finns en $n \times n$ matris D sådant att $AD = I$
12) A^T är inverterbar

Om A och B är kvadratiska matriser och $AB = I$, så är både A och B inverterbara med $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$

<u>Ex 1</u> Undersök om matrisen A är inverterbar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$$

$\det(A) = 5 \neq 0 \Rightarrow$ Matrisen är inverterbar

\# Beräkning av inversen för en 2x2 matris:

Låt A vara 2x2 matris : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

A är inverterbar om $\det(A) \neq 0$ dvs. $ad - bc \neq 0$

Inversen kan beräknas med följande formel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>Ex 2</u> Beräkna den inversa matrisen för nedanstående matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2 \neq 0$$

matrisen är inverterbar

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Beräkning av inversen för en $n\times n$ matris

Gauss-Jordan metod för matrisinvertering

Låt A vara en inverterbar kvadratisk matris $(\det(A)\neq 0)$ och I är enhetsmatrisen av samma typ $(n\times n)$

Vi placerar enhetsmatrisen till höger om A och bildar en matris $(A|I)$ av typ $n\times 2n$. Med elementära radoperationer ombildar vi $(A|I)$ till $(I|B)$. Om $(A|I)\sim(I|B)$, så är $A^{-1}=B$.

(Notera: Om matrisen inte är inverterbar, så är det omöjligt att ombilda $(A|I)$ till $(I|B)$.)

Ex 3

$$A=\begin{bmatrix}2&4&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=?$$

$$(A|I)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&4&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&2&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\begin{array}{l}R_1=\frac{1}{2}R_1\\R_3=\frac{1}{2}R_3\end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1/2&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1/2&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}R_1=-2R_2+R_1\\R_3=-R_4+R_3\end{array}\sim\left[\underbrace{\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}}_{I}\left|\underbrace{\begin{array}{cccc}1/2&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&-1\\0&0&0&1\end{array}}_{B}\right.\right]\Rightarrow B=A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$