TMV141 CRAMERS REGEL

L7

~~Sats~~ En kvadratisk linjär ekvationssystem $Ax=b$ har unik lösning omm $\det(A) \neq 0$.

Sats (3.3.7) Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $b \in \mathbb{R}^n$. Beteckna med $A_i(b)$ den matris som erhålls från A genom att kolonn i ersätts av b.

$$A_i(b) = [a_1 \ldots \underbrace{b}_{\text{kolonn } i} \ldots a_n]$$

Cramers regel: Antag att A är inverterbar $n \times n$-matris. Låt $b \in \mathbb{R}^n$. Då ges lösningen x till matrisekvationen $Ax=b$ av

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}, \quad i = 1, .., n$$

Sats (3.3.8) Låt A vara en inverterbar matris. Då är:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Adjunkten $\operatorname{adj}(A)$ till A är matrisen $C^T = (c_{ij})^T$ där $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, A_{ij} är den matris som fås från A genom att strycka rad i och kolonn j.

Cramers regel: Betrakta ekv.systemet:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Om $\det(A) \neq 0$ då gäller: $x_1 = \dfrac{\det(A_1(b))}{\det(A)}, x_2 = \dfrac{\det(A_2(b))}{\det(A)}, \ldots$

$$\cancel{x_n = \det_n(b))} \qquad x_n = \frac{\det(A_n(b))}{\det(A)}$$

~~det~~

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} ; \quad \det(A_1(b)) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(A_2(b)) = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \det(A_n(b)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Ex lös med Cramers regel följande systemet.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 2\cdot 2 - 1\cdot 3 = 4 - 3 = 1 \neq 0$ (ok med Cramers regel)

$$\det(A_1(b)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 1\cdot 7 = 8 - 7 = 1$$

$$\det(A_2 b)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 4\cdot 3 = 14 - 12 = 2$$

$$x = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2$$

Adjungerad matris

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\underbrace{A_{ij}})$$

matris där vi har tagit bort rad i och kolonn j

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ? \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +4 \qquad C_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +1 \qquad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 3 \\ -2 & 1/2 & -1 \\ -2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$$

TMV141 LU-faktorisering

~~L~~ L7

En metod till ~~att~~ lösa ek.sys. $Ax=b$

Givet en matr A vi vill hitta två matriser L och U, så att $A=L\cdot U$

Anledning: Man vill lösa många ekv. med samma koefficientmatris A, men olika högerled b_i, dvs. $Ax=b_1$, $Ax=b_2$ ..., $Ax=b_k$

LU-faktorisering innebär att man skapa en nedre (LOWER) triangulär matris L med endast ettor på huvuddiagonalen och en övre (UPPER) triangulär matris U så att $A=L\cdot U$.

Notera Ibland det är omöjligt att skriva en matris i ~~en~~ LU form.

Algoritm för LU-faktorisering (Metod 1)

1° Reducera som möjligt, A till en ~~ma~~ trappstegform matris U

2° Konstruera L så med samma sekvens av radoperationer reducerar L till I.

Ex 1 (Metod 2) $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&8&14\\2&6&13\end{bmatrix}$, $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\L_{21}&1&0\\L_{31}&L_{32}&1\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\0&U_{22}&U_{23}\\0&0&U_{33}\end{bmatrix}$

$$A=L\cdot U \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&4\\3&8&14\\2&6&13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\L_{21}U_{11}&L_{21}U_{12}+U_{22}&L_{21}U_{13}+U_{23}\\L_{31}U_{11}&L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22}&L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{U_{11}=1}$ $\boxed{U_{12}=2}$ $\boxed{U_{13}=4}$

$L_{21}U_{11}=3 \Rightarrow L_{21}\cdot 1=3 \Rightarrow \boxed{L_{21}=3}$

$L_{21}U_{11}+U_{22}=8 \Rightarrow 3\cdot 2+U_{22}=8 \Rightarrow \boxed{U_{22}=2}$

$L_{21}U_{13}+U_{23}=14 \Rightarrow 3\cdot 4+U_{23}=14 \Rightarrow \boxed{U_{23}=2}$

$L_{31}U_{11}=2 \Rightarrow L_{31}\cdot 1=2 \Rightarrow \boxed{L_{31}=2}$

$L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22}=6 \Rightarrow 2\cdot 2+L_{32}\cdot 2=6 \Rightarrow \boxed{L_{32}=1}$

$L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33}=13 \Rightarrow 2\cdot 4+1\cdot 2+U_{33}=13 \Rightarrow \boxed{U_{33}=3}$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hur löser man ekv.sys $Ax = B = ?$

1° Beräkna L och $U \Rightarrow A = L \cdot U \Rightarrow LUX = B$

2° $Y = UX \Rightarrow LY = B$ beräkna triangulär sys. för Y

3° Beräkna $UX = Y$ för X

Ex 2 lös ekv.-systemet $AX=B$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}$

1° Beräkna L och U

Kolla ex 1 $\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2° $LY = B$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow LY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = 3}$

$3y_1 + y_2 = 13 \Rightarrow \boxed{y_2 = 4}$

$2y_1 + y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow \boxed{y_3 = -6}$

3° $UX = Y \Rightarrow UX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

$3x_3 = -6 \Rightarrow \boxed{x_3 = -2}$

$2x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 4}$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

Lösningen till ekv.sys är $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$