2019
0205
L8
TMV143

Repetition V1+V2

Självbedömning

1° För vilka värden av h är följande vektorer linjärt oberoende?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix}$$

2° För vilka värden av k är följande matris inverterbar?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{bmatrix}$$

3° Fyll i luckorna:

a) Vektorerna $v_1, \dots, v_n$ är linjärt oberoende o.m.m vektorekv. $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ endast har ______________________________.

b) Om ett ____________ finns i HL så finns ingen lösning.

c) Mängden av alla ______________________ av $v_1, \dots, v_k$ kallas linjära höljet av $v_1, \dots, v_k$.

d) Om A är en triangulär matris så är $\det(A)$ ______ ____________ av diagonalelementen.

4° Sant eller falskt

a) Linjär ekv. sys. har precis en lösning o.m.m systemets determinant är inte 0.

b) Om $\det(A) = 0$ då är matris A inverterbar

c) Linjär ekv. sys. $Ax = b$ har exakt en lösning $X = A^{-1}b$ o.m.m. $\det A = 0$

d) Om kolonner av en kvadratisk matris är linjärt oberoende då är determinat 0.

e) Om A, B och C är matriser då gäller:
$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$

d) Om A och B är matriser då $A \cdot B = B \cdot A$

5° Vad är geometrisk beskrivning av determinant av en matris?

28 REPETITION (V1 + V2)

TMV141

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ekv. sys.

Matrisform

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow [a_1, \dots, a_n | b]$$

koefficientmatris a_{ij} — HL

Totalmatris $(a_{ij} | b_i)$

Vektorform

$a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

Homogent sys $\Rightarrow b_i = 0$
$\Rightarrow$ har alltid triviala lösningen $x = 0$

$m = n$ - kvadratiskt
$m < n$ - underbestämt
$m > n$ - överbestämt

$m \times n$ - matris
m - rader
n - kolonner

Inhomogent $\Rightarrow b_i \neq 0$
$\Rightarrow$ har icke triviala lösningen o.m.m. har någon fri variabel
$\Rightarrow$ har oändligt många lösningar

Bundna variabler:
Variabler som hör ihop med kolonner med pivotel.

Fria variabler — Pivot $\neq 0$
Variabler som hör ihop med kolonner utan pivotel.

Pivotel: Ledande tal i en trappstegsform

TRAPPSTEGSFORM (REF) - rektangulär totalmatris
a) alla icke-nollrader är ovanför alla nollrader
b) varje ledande tal i en rad är strikt till höger om det ledande talet i raden före
c) alla tal i en kolonn under ett ledande tal är noll

REDUCERAD TRAPPSTEGSFORM (RREF)
a) + b) + c) + d) det ledande talet i varje nollskild rad är 1
e) varje ledande ~~t~~ etta är det enda nollskilda talet i kolonnen.

$$\text{REF} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \text{RREF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Linjär kombination av vektorerna $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ med vikterna $c_1, \dots c_k$ är vektorn y: $y = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$, Mängden av alla linjärkomb. av $v_1, \dots, v_k$ är LINJÄRA HÖLJET Span$\{v_1, \dots, v_k\}$

LINJÄRT OBEROENDE omm. vektorekv: $x_1u_1 + \dots x_pu_p = 0$ endast har triviala lösning.

LINJÄRT BEROENDE omm vektorekv: $x_1u_1 + \dots x_pu_p = 0$ har också en icke-triviala lösningen.
Minst en av vektorerna är en linjär kombination av de övriga.

Matriser

$m = n$ - kvadratisk matris ($n \times n$ matris, $\mathbb{R}^{n\times n}$)

IDENTITETSMATRIS (ENHETSMATRIS) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ $i \neq j$

TRANSPONATET (A^T) Om A är $m \times n$ matris $\Rightarrow$ A^T är $n \times m$ matris

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

INVERSEN (A^{-1}) $C \cdot A = I = A \cdot C \Rightarrow C$ är inversen till A, $C = A^{-1}$

2x2 matriser $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{\text{adj} A}$ $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ A är inverterbar

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

3x3 matriser och vidare ($n \geq 2$) Överför matrisen $[A/I]$ till reducerad trappsteg form; Om den är $[I/B] \Rightarrow B = A^{-1}$

Kvadratisk matris är inverterbar o.m.m. $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 0$ om A:s kolumner är linjär beroende

$\det(A) = 0$ om A:s rader är linjär oberoende

DETERMINANTER

$n = 2$ (2x2 matris) $\det A = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - bc$

$n > 2$ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$

Linjära ekv.sys har PRECIS EN LÖSNING omm systemets determinant är $\neq 0$.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ PRECIS EN LÖSNING

Om $\det(A) = 0$ har systemet antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar.

$\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{1) ingen LÖSNING} \\ \text{2) OÄNDLIGT många lösningar} \end{cases}$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ matrisen A är inverterbar $\Leftrightarrow$ systemet $Ax=B$ har exakt en lösning $X = A^{-1}B$

Om A är triangulär matris så är $\det(A)$ ~~[illegible]~~ produkt av diagonalel.

Låt A vara en kvadratisk matris

1) Om en multiple av en rad i A adderar till en annan rad så vi producerar en ny matris B, så gäller att $\det B = \det A$

2) Om man byter plats på två rader i A, för den nya matrisen B gäller: $\det(B) = -\det(A)$

3) Om man ~~att~~ multiciplera en rad i A med ett tal k, så gäller att $\det(B) = k \cdot \det(A)$

4) Om B är också en kvadratisk matris
$\det AB = \det A \cdot \det B$
$\det A^T = \det A$

Invers av en matris beräknas genom Gauss-Jordan metod $(A|I) \sim (I|B) \Rightarrow B = A^{-1}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om det finns en matris $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sådan att $AB = BA = I$, B är invers av A

Ekv.sys. $Ax = b$, A är inverterbar $\Rightarrow$ entydig lösning $\forall b \in \mathbb{R}^n$ ges av $x = A^{-1}b$. En matris är inverterbar o.m.m $\det \neq 0$.

Determinant av en enhets matris är area (2D), volym (3D), hypervolym (4D) av en unit parallellogram / / ~~ku~~ tärning / hypercube.

det < 0 ⇒ A ändrar orientering

det = 1 ⇒ A bevarar area / volym

~~det~~ = 0 ⇒ A är en destruktiv matris alt i en dimension.

→ linjära beroende kolonner