TMV141 VEKTORRUM, NOLLRUM, KOLONNRUM

L9

Def Ett VEKTORRUM (över $\mathbb{R}$) är en mängd V vars objekt kallas vektorer med två operationer:

i) en additionsopperation som till varje $u \in V$ och $v \in V$ ordnar $u+v \in V$

ii) en operation kallad multiplikation med skalär som till $u \in V$ och $a \in \mathbb{R}$ ordnar $a \cdot u \in V$

som uppfyller följande villkor (axiom) för alla $u, v, w \in V$ och alla $a, b \in \mathbb{R}$:

1. Om $u \in V$ och $v \in V$ så gäller $u+v \in V$
2. Om $a \in \mathbb{R}$ och $u \in V$ så gäller $au \in V$
3. $u+v = v+u$
4. $(u+v)+w = \cancel{(u+v)+} u+(v+w)$
5. det finns en nollvektor 0 i V sådan att $u+0=u=0+u$
6. för varje $u \in V$ existerar det ett element $-u \in V$ så att $u+(-u)=0$
7. $a(u+v) = au+av$
8. $(a+b)u = au+bu$
9. $(ab)u = a(bu)$ $\quad (ab)u = a(bu)$
10. $1 \cdot u = u$

Ex

1) Låt M_{22} vara mängden av alla 2×2 matriser med matrisaddition och muliplikation med skalär definierade som vanligt.
Då är M_{22} ett vektorrum.
Nollvektorn i rummet är nollmatrisen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(Kontrollera att alla axiom 1-10 är uppfyllda)

2) Låt M_{mn} vara mängden av alla $m\times n$ matriser med matrisaddition med skalär definierade som vanligt.
Då är M_{mn} ett vektorrum.
Nollvektorn i rummet är nollmatrisen $[0]_{m\times n}$

UNDERRUM

En delmängd W till ett vektorrum V kallas för ett UNDERRUM om W är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med skalär som gäller i V.

<u>Def</u> En icke-tom delmängd W i ett vektorrum V kallas UNDERRUM o.m.m följande tre villkor är uppfyllda:

1) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
(vi säger att W är SLUTEN under addition)

2) $(u \in W, \lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda u \in W$
(vi säger att W är SLUTEN under multiplikation med skalär)

3) $0 \in W$ (nollvektor tillhör W)

Sats (   ) Om $v_1, \dots, v_p$ tillhör ett vektorrum V så är $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ ett underrum i V.

<u>Ex</u> 1) Visa att mängden W av alla vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vars koordinater satisfierar ekv. $2x + 2y + 8z = 5$ INTE är ett underrum till $\mathbb{R}^3$.

Nollvektorn $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger inte i W eftersom $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \neq 5$. Villkor 2) är inte uppfyllt och därmed är W inte ett underrum.

<u>Def</u> NOLLRUMMET till en $m \times n$-matris A, $\operatorname{Nul}(A)$, är mängden av alla lösningar till den homogena ekv. $Ax = 0$:

$$\operatorname{Nul}(A) = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ och } Ax = 0\}$$

Sats ( ) Nollrummet till en $m\times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Def: KOLONNRUMMET till en $m\times n$-matris A, $Col(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A. Om $A=[a_1 \cdots a_n]$ så är

$$Col(A) = Span\{a_1, \ldots, a_n\}$$

(eller $Col(A) = \{b : b = Ax,$ för någon vektor $x \in \mathbb{R}^n\}$

Sats ( ) Kolonnrummet till en $m\times n$-matris A är ett underrum i $\mathbb{R}^m$.

Skillnad mellan $Nul(A)$ och $Col(A)$ för en $m\times n$-matris A.

	$Nul(A)$	$Col(A)$
1°	$Nul(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$	$Col(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^m$
2°	$Nul(A)$ är implicit definierat av ekv. $Ax=0$	$Col(A)$ är explicit definierat av kolonnvektorerna i A
3°	Det tar tid att bestämma vektorer i $Nul(A)$	Det är lätt att hitta vektorer i $Col(A)$
4°	Det finns inget uppenbart samband mellan $Nul(A)$ och el i A	Det finns ett uppenbart samband mellan $Col(A)$ och elementen i A
5°	En typisk vektor v i $Nul(A)$ är sådan att $Av=0$	En typisk vektor i $Col(A)$ är sådan att $Ax=v$ är konsistent

Nul(A)	Col(A)
6° Givet en vektor v, så är det ~~et~~ enkelt att avgöra om $v \in Nul(A)$	Givet en vektor v, så tar det ofta tid att avgöra om $v \in Col(A)$
7° $Nul(A) = \{0\}$ omm ekv. $Ax = 0$ endast har trivial lösning	$Col(A) = \mathbb{R}^m$ omm ekv. $Ax = b$ har lösning för alla $b \in \mathbb{R}^m$
8° $Nul(A) = \{0\}$ omm den linjära avbildningen $x \Rightarrow Ax$ är injektiv	$Col(A) = \mathbb{R}^m$ omm den linjära avbildningen $x \Rightarrow Ax$ är surjektiv.

LINJÄRT BEROENDE OCH OBEROENDE VEKTORER

Def Låt V vara ett vektorrum. Vektorerna $e_1, e_2, .., e_n$ är LINJÄRT OBEROENDE om:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = .. = \lambda_n = 0$$

(dvs ekv. har endast den triviala lösningen)

Därmed är vektorerna $e_1, e_2, .., e_n$ LINJÄRT BEROENDE om

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

har icke-triviala lösningar (.dvs. om det finns en lösning där minst ett $\lambda_k \neq 0$) och ~~därmed~~ minst en vektor bland $e_1, e_2, .., e_n$ är en linjär kombination av andra vektorer,

Def Låt V vara ett vektorrum. En vektor w är linjär kombination av $e_1, e_2, .., e_n$ om det finns skalär $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ så att: $w = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$

Ex Bestäm om w är linjär kombination av u_1 och u_2 då:

a) $w = (8,7,6)$, $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,1,0)$

b) $w = (3,3,6)$, $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,1,0)$

a) Vi söker om det finns en lösning till

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

dvs $(8,7,6) = \lambda_1 (1,2,3) + \lambda_2 (2,1,0)$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 8 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ 3\lambda_1 + = 6 \end{cases} \iff \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

Systemet har precis en lösning!

Därmed kan w skrivas som en linjär kombination av u_1 och u_2: $w = 2u_1 + 3u_2$.

b) $$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ 3\lambda_1 + = 6 \end{cases} \iff$$

systemet SAKNAR lösning (kontrollera själva).

Därmed kan w INTE skrivas som en linjär kombination av u_1 och u_2.