

DUGGA

TMV151

Matematisk analys i en variabel M1, 2014–11–25

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:.....Antagningsår.....

Personnummer:.....Email.....

1. Beräkna summan $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

Lösn. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2$.

2. Beräkna integralen $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx$.

Lösn. Låt $u = 1 + x^2$, $\frac{1}{2} du = x dx$, $u(0) = 1$, $u(\sqrt{3}) = 4$. Vi får då $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 u^{-1} du = \frac{\log(4)}{2} = \log(2)$.

3. Beräkna integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Lösn. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-x^{-2}/2\right)_1^R = \frac{1}{2}$.

4. Beräkna integralen $\int_1^2 \frac{1}{3x-x^2} dx$.

Lösn. Partialbråsuppdelning ger, $\frac{1}{3x-x^2} = \frac{1}{3x} + \frac{1}{3(3-x)}$. Vi får $\int_1^2 \frac{1}{3x-x^2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} dx = \frac{1}{3} (\log|x| - \log|3-x|)_1^2 = \frac{2}{3} \log(2)$.

5. Använd mittpunktsformeln för att approximera $\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$ med två delintervall.

Lösn. $M_2 = \frac{\pi}{2} (\sin^2(\pi/4) + \sin^2(3\pi/4)) = \frac{\pi}{2}$.

6. Beräkna volymen av rotationskroppen som uppkommer då $f(x) = \sin(x)$ roterar kring x -axeln för $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Lösn. $V = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

7. Beräkna centroiden för triangeln med hörn i $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ och $(1, \frac{1}{2})$.

Lösn. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{0+1/2+1}{3}, \frac{0+1+1/2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

/axel