TMV151

Matematisk analys i en variabel

Föreläsare: Axel Målqvist

---

* Praktisk information
Google TMV151 1415

- 3 föreläsningar / vecka
- 3 övningar / vecka
- 1 dugga i lv 4
- 1 tenta

* Kurs litteratur
- Adams Essex, Extra material

* Idag: Summor och area som gränsvärde av summor. Kapitel 5.1 och 5.2

* Summor och Σ notation

Definition Låt $m, n \in \mathbb{Z}$ sådan att $m \leq n$ och f vara en funktion definierad för heltalen $m, m+1, \ldots, n$. Då gäller

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n)$$

Ex: $\sum_{i=-2}^{3} i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 19$

En vanlig notation är

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n, \text{ där tex } a_i = f(i)$$

Oändlig summa skrivs

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Givet konstanter A, B och funktioner f och g definierade för heltalen $m, \dots, n$ gäller

$$\sum_{i=m}^{n} \big(Af(i) + Bg(i)\big) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Vidare gäller $\displaystyle\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m)$

eftersom $VL = f(m) + f(m+1) + \dots + f(m+n)$ och

$$HL = f(0+m) + f(1+m) + \dots + f(n+m) = VL.$$

Ex:

$$\sum_{i=3}^{8} (i-2)^2 = \{j = i-2\} = \sum_{j=1}^{6} j^2$$

* Beräkning av Summor

Sats 5.1

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$, $r \neq 1$

Bevis

a) är trivial

b) följer av denna kalkyl (trick)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 & \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & & & + & (n+1) & = n(n+1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$$

c) Här krävs mer avancerat trick

Vi har att $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

Vi summerar nu detta uttryck med $k = 1, 2, \dots, n$

$$
\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \\
&\vdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
+ \quad (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}
$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

teleskoperande summa!

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n}{3} =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n}{3}$$

$$= \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3} = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{n}{6}\cdot(2n+1)(n+1)$$

d) Låt $S = \sum_{i=1}^{n} r^{i-1}$, vi har

$$(r-1)S = rS - S = (r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) - (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}) = r^n - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{om} \quad r \neq 1$$

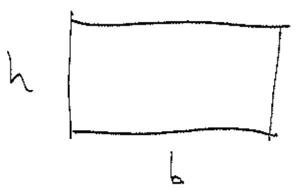
Ex Beräkna $\sum_{k=m+1}^{n} (2k^2 - k) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - k - \sum_{k=1}^{m} 2k^2 - k =$$

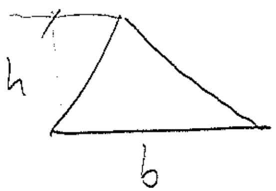
$$= 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 2\,\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} - \frac{2m^3}{3} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$$

✱ Area som gränsvärde av summor

Arean av en rektangel och triangel ges av

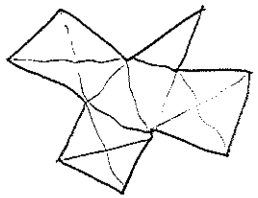


$A = h \cdot b$



$A = \frac{h \cdot b}{2}$

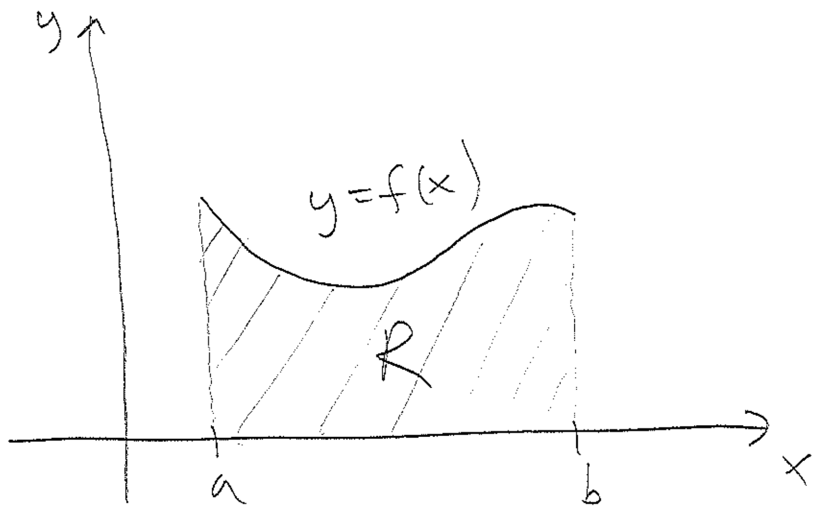
Varje polygon (ett område som begränsas av linje segment)



kan delas in i icke överlappande trianglar.

Därmed kan vi beräkna arean av en godtycklig polygon.

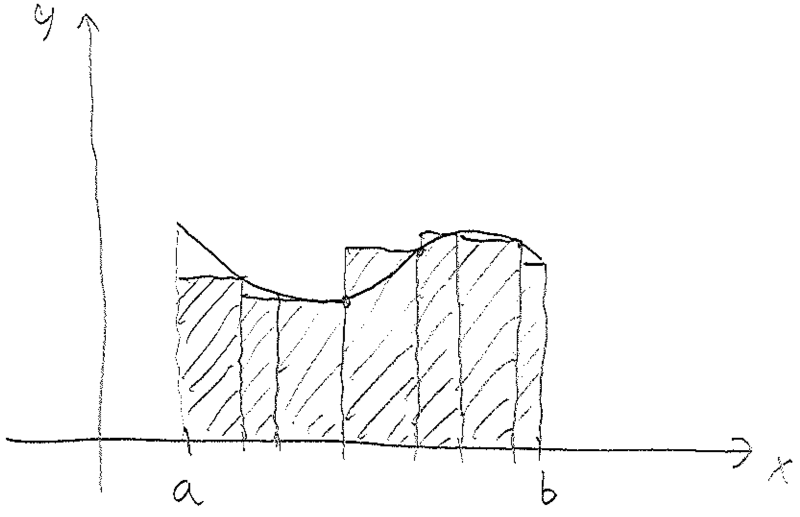
– Arean av ett område R mellan en given positiv funktion $f(x)$ och x-axeln



Vi delar intervallet $[a, b]$ i n delintervall $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Vi låter $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ vara längden av delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Vi skapar nu rektanglar med bredd Δx_i och höjd $f(x_i)$



Arean av rektanglarna är

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Vi noterar att om f är avtagande $f(x) < f(y)$ för $x > y$ så kommer $S_n <$ Arean av R

På samma sätt om f är växande $f(x) > f(y)$, $x > y$: $S_n >$ Arean av R

Genom att göra en finare indelning minskar felet mellan S_n och arean av R.

Låter vi det största delintervallets längd $\max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$ gäller

$$\text{Arean av } R = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n$$

Ofta låter man delintervallen ha samma längd:

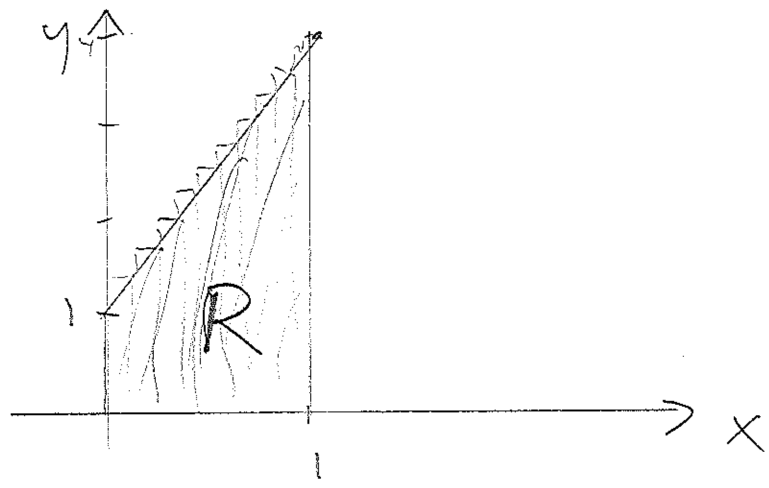
$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$

– Några area beräkningar

<u>Ex</u>: Låt $f(x) = 3x+1$ och beräkna arean mellan $f(x)$ och x-axeln mellan $x=0$ och $x=1$.

Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$



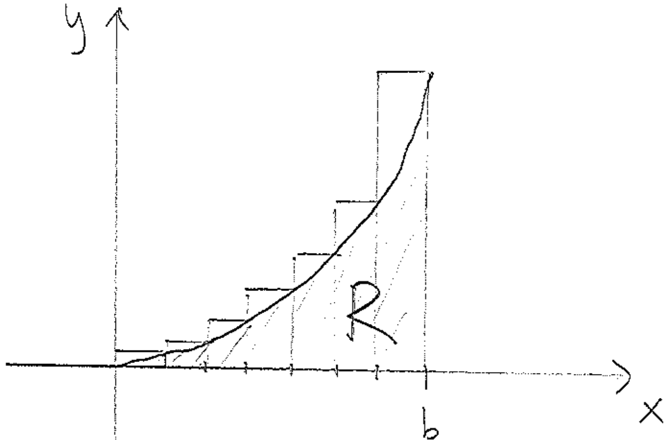
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3\frac{i}{n}+1 =$$

$$= \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + 1 = \frac{3n(n+1)}{2n^2} + 1 =$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{3}{2n}$$

$\Rightarrow$ Arean under $R = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{2}$

Ex: Låt $f(x) = x^2$. Beräkna arean mellan $x=0$, $x=b$, x-axeln och $f(x)$.



Låt $x_i = b \cdot \frac{i}{n}$ och

$$S_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{b^2}{n^2} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

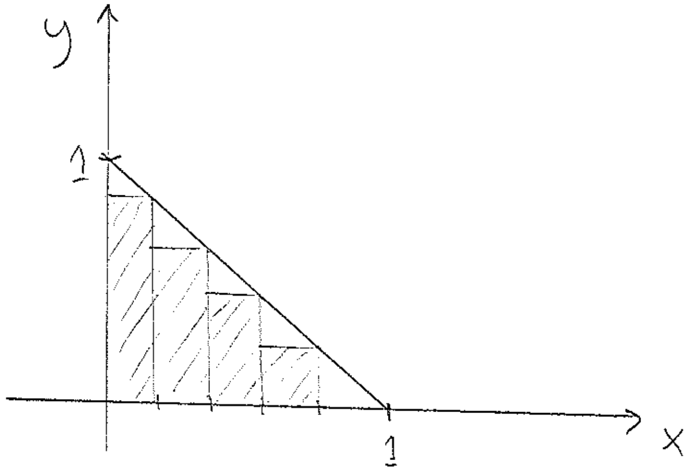
$$= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} \Rightarrow$$

Arean av $R = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{3}$

Ex: Identifiera gränsen $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$ som en area och beräkna den.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}.$$ Vi identifierar

$\frac{1}{n} = \Delta x_i$, $x_i = \frac{i}{n}$, $f(x_i) = 1 - x_i$



$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{i}{n^2}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$