* Idag:
  * Inverssubstitution
  * Andra metoder för att beräkna integraler
  * Generaliserade integraler

Kapitel 6.3 - 6.5

* Inverssubstitution

Kom ihåg variabelsubstitution

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = g(u) \\ dx = g'(u)du \end{array} \right\} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\,du$$

Trigonometrisk substitution:

- $x = a\sin\theta$

$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

är användbar för integraler med termen $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

Ex: $b \le a$, $A = 2\int_b^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin\theta \\ dx = a\cos\theta\,d\theta \end{array} \right\}$

$= 2\int_{x=b}^{x=a} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \\ = 2\cos^2\theta - 1 \end{array} \right\}$$

$$= a^2 \int_{x=b}^{x=a} 1 + \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \Big(\theta + \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2\theta}_{\sin\theta\cos\theta}\Big)\Big|_{x=b}^{x=a}$$

$$= a^2\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\Big|_{x=b}^{x=a}$$

$$= a^2\frac{\pi}{2} - a^2\arcsin\frac{b}{a} - b\sqrt{a^2-b^2}$$

- $x = a\tan\theta$

$\theta = \arctan\frac{x}{a}$

är användbar för integraler med termer $\sqrt{a^2+x^2}$ eller $\frac{1}{x^2+a^2}$

· Vi har $\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\tan^2\theta} =$

$$= a\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \tan\theta\cdot\cos\theta = \frac{x}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Ex:

a)
$$\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} 3x = \tan\theta \\ 3dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ 1+9x^2 = 1+\tan^2\theta \\ \quad = (\cos^2\theta)^{-1} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{d\theta}{3\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)^2} =$$

$$= \int \frac{d\theta}{3\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^2} = \int \frac{d\theta}{3\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{6}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C$$

$$= \frac{1}{6}\arctan(3x) + \frac{1}{6}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}}_{\cos\theta}\cdot\underbrace{\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}}_{\sin\theta = \tan\theta\cdot\cos\theta} + C$$

$$= \frac{1}{6}\arctan(3x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+9x^2} + C$$

– $\tan\frac{\theta}{2}$ substitutionen

$x = \tan\frac{\theta}{2}$, $\theta = 2\arctan x$

Denna substitution gör rationella uttryck i trigonometriska funktioner övergår till rationella polynom.

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

Ex:

$$\int \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta = \left\{\begin{matrix} x = \tan\frac{\theta}{2} & d\theta = \frac{2dx}{1+x^2} \\ \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2} & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx = 2\int \frac{1}{3+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

* Underbestämda koefficienter

I denna strategi ansätter man en form för primitiv funktionen och bestämmer sedan koefficienterna.

Ex: $I = \int (x^2+x+1)e^x \, dx$

Antag $I = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^x + C$

Mer eller mindre välgrundad gissning.

$$\frac{dI}{dx} = (a_1 + 2a_2 x)e^x + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^x$$

$$= (a_2 x^2 + (2a_2 + a_1)x + a_1 + a_0)e^x$$

$$= (x^2 + x + 1)e^x$$

$\Rightarrow a_2 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_0 = 2$

$\Rightarrow I = (x^2 - x + 2)e^x + C$

→ Generaliserad Integral

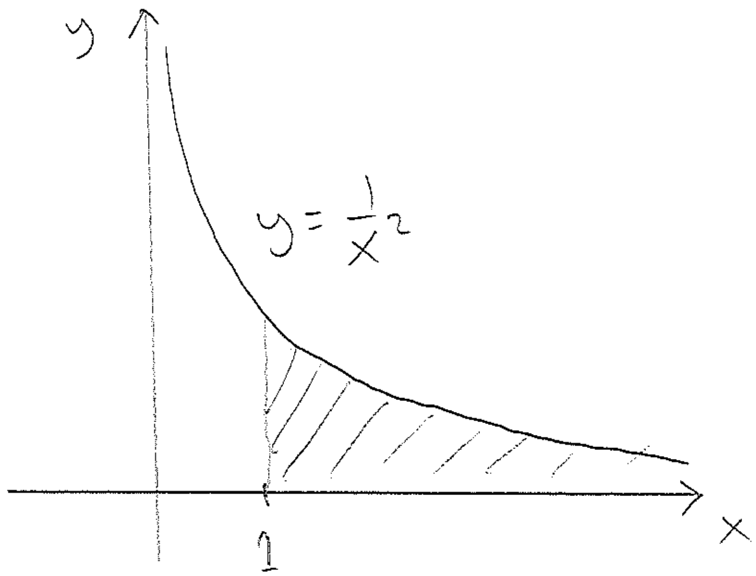
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Vi tillåter nu även (i) $a = -\infty$, $b = \infty$

(ii) f obegränsad

*Typ (i)

Ex: Beräkna arean under funktionen $y = \frac{1}{x^2}$ för $x \geq 1$.



$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^R = 1$$

Eftersom gränsvärdet finns säger vi att integralen <u>konvergerar</u>.

Ex: Låt nu $y = \frac{1}{x}$ och beräkna arean över x-axeln för $x \geq 1$.

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \infty .$$

Eftersom gränsvärdet inte existerar säger vi att integralen <u>divergerar</u>

* Typ (ii)

Låt f vara kontinuerlig på $(a, b]$ men obegränsad nära a. Vi definierar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

och på motsvarande sätt nära b.

<u>Ex</u>: $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är obegränsad i $a=0$.

$$A = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_c^1 = 2$$

Integralen konvergerar.

Sats 6.2 p-integraler

Låt $0 < a < \infty$

(i) $\int_a^\infty x^{-p}\,dx$ $\begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \\ \text{divergerar till } \infty & p \le 1 \end{cases}$

(ii) $\int_0^a x^{-p}\,dx$ $\begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \text{divergerar till } \infty, & p \ge 1 \end{cases}$

Bevis:

(i) $p>1$: $\lim_{R\to\infty} \int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)\Big|_a^R =$

$$= \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

$p=1$: $\lim_{R\to\infty} \int_a^R x^{-1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\ln x \right)\Big|_a^R = \infty$

$p<1$: $\lim_{R\to\infty} \int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)\Big|_a^R = \infty$

(ii) $p<1$: $\lim_{c\to 0} \int_c^a x^{-p}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)\Big|_c^a = \frac{a^{1-p}}{1-p}$

$p=1$: $\lim_{c\to 0} \int_c^a x^{-1}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \ln x \Big|_c^a = \infty$

$p>1$: $\lim_{c\to 0} \int_c^a x^{-p}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)\Big|_c^a = \infty$

Sats 6.3 Begränsning av integraler

Låt $-\infty \le a < b \le \infty$, f, g kontinuerliga på (a,b)

$0 \le f(x) \le g(x)$. Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så gör även $\int_a^b f(x)\,dx$ det och

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

P.s.s om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergerar gör även $\int_a^b g(x)\,dx$ det.

Bevis: Bygger på bevis om den bestämda integralen och ingår inte.

Ex: Visa att $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ är konvergent

Vi vill använda att $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $x \geq 1$

och $e^{-x^2} \leq 1$ $x < 1$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 1\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx =$$

$$= 1 + \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^R = 1 + \frac{1}{e}$$