

Idag: \* Numerisk lösning av  
integraler

\* Felanalys

Kapitel 6.6-6.7

\* Numerisk lösning av integraler

Vi studerar  $I = \int_a^b f(x) dx$

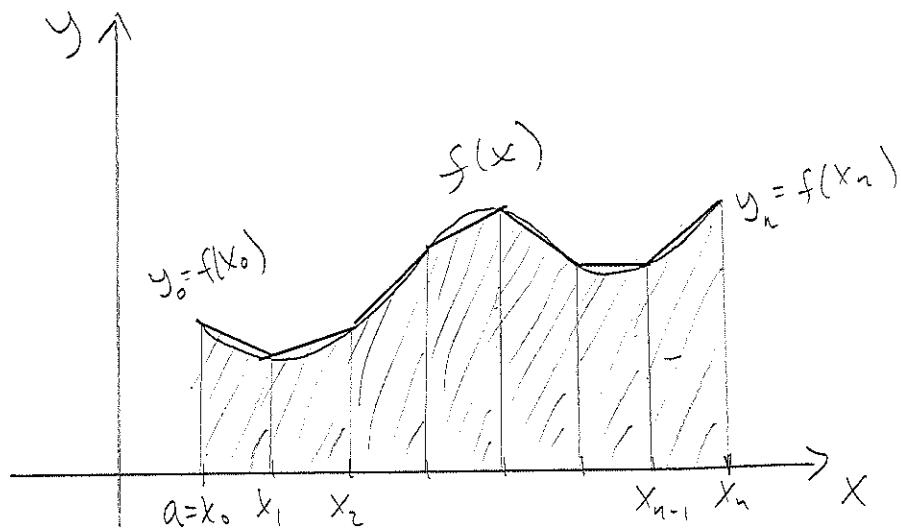
- I många fall är primitiv-  
funktionen till  $f$  svår eller  
omöjlig att uttrycka i elementära  
funktioner.

Då krävs numeriska approximationer,  
numerisk integration eller kvadratur.

De tekniker vi studerar kräver att  
 $f(x)$  evalueras (beräknas) i ett antal  
( $n$ ) jämnt fördelade punkter i  $[a, b]$ .

Vi delar  $[a, b]$  i  $n$  delintervall  
 $x_i = a + ih$ , där  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $i=0, \dots, n$   
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

- Trapezregeln



Vi konstruerar en rät linje mellan  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  och  $(x_i, y_i)$  och beräknar arean av trapezsen,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

$$= h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

Definition

Trapezregeln för att approximera  $\int_a^b f(x) dx$  med  $n$  delintervall av samma längd är

$$T_n = h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

Ex:

Låt  $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ , beräkna  $T_4, T_8$

$n=4 \Rightarrow h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$$T_4 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0,69702381\dots$$

$n=8 \Rightarrow h = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$

$$T_8 = \frac{1}{8} (\dots) = 0,69412185\dots$$

$$T_{16} = 0,69339120\dots$$

$$I = \ln 2 = 0,69314718\dots \quad \text{Felet minskar!}$$

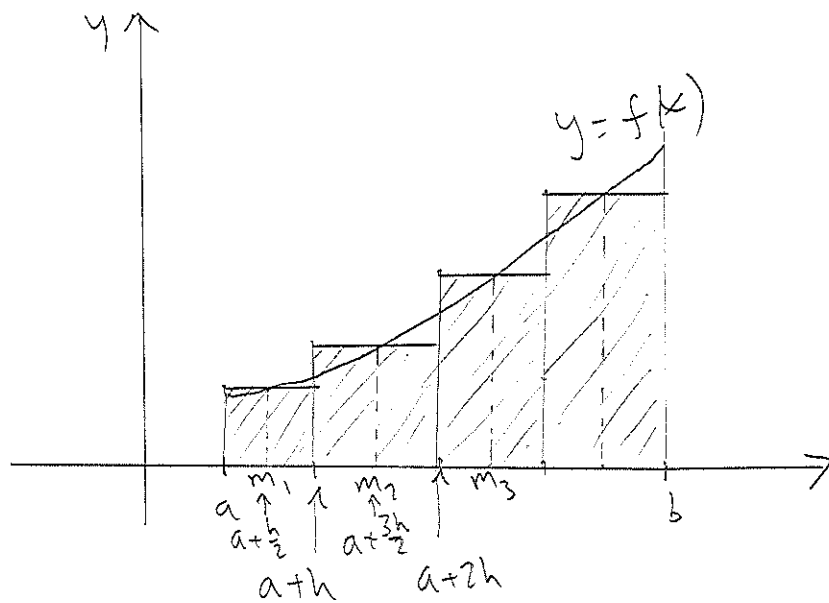
\* Mittpunktsregeln  
Definition

Mittpunktsregeln för att approximera  $\int_a^b f(x) dx$  med  $n$  delintervall av samma

Längd är

$$M_n = h (f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_n)) = h \sum_{i=1}^n f(m_i)$$

där  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $m_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ ,  $j = 1, \dots, n$



Ex:  
 Låt  $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . Beräkna  $M_4$

$$M_4 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{9/8} + \frac{1}{11/8} + \frac{1}{13/8} + \frac{1}{15/8} \right) = 0.69266055\dots$$

Kom ihåg:  $I = 0.69314718\dots$

Sats 6.4

Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig och har första och andra derivata som är kontinuerliga. Antag vidare  $|f''(x)| \leq K$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{24} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

där  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Notera att felet  $\sim \frac{1}{n^2}$ .

Beris: Mittpunkt. För Trapets, se boken

Vi studerar ett delintervall  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Taylor's formel ger:  $|f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x - m_i)| \leq \frac{K}{2}(x - m_i)^2$   
 $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(m_i)h \right| =$$

$$= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i) dx \right| = \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} A(x - m_i) dx = 0 \right\}$$

$$= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x - m_i) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x - m_i)| dx \leq$$

$$\leq \frac{K}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)^2 dx = \left\{ y = x - m_i \right\} =$$

$$= \frac{K}{2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{K}{2} \left( \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{K}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3}{8} =$$

$$= \frac{K h^3}{24}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(m_i)h \right| \leq n \cdot \frac{K h^3}{24} =$$

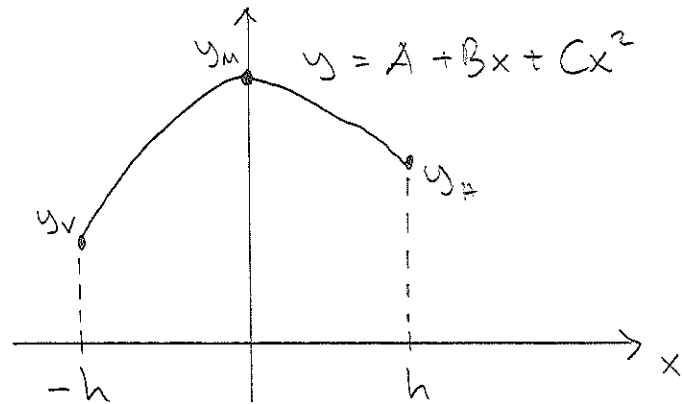
$$= \frac{(b-a)K h^2}{24} = \frac{K(b-a)^3}{24 n^2}$$

\* Simpson's formel

Mittpunktsregeln approximerar med styckvisa konstanter, trapetsmetoden med styckvisa linjära funktioner.

Simpson's regel använder kvadratiske polynom.

Vi studerar arean under en kvadratisk funktion.



$$\left. \begin{aligned} y_v &= A - Bh + Ch^2 \\ y_m &= A \\ y_{\#} &= A + Bh + Ch^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = y_m, \quad 2Ch^2 = y_v - 2y_m + y_{\#}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (A + Bx + Cx^2) dx &= 2hy_m + C \left( \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-h}^h = \\ &= 2hy_m + \frac{1}{3}2Ch^3 = 2hy_m + \frac{h}{3}(y_v - 2y_m + y_{\#}) \\ &= \frac{h}{3}(y_v + 4y_m + y_{\#}) \end{aligned}$$

Givet en funktion  $f$  utvärderad  
i  $n+1$  punkter  $y_j = f(x_j)$ ,  $j=0, 1, \dots, n$

där  $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$ ,  $j=0, 1, \dots, n$

Kan vi använda 2:a grads approximationer på delintervallen parvis

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Summerar vi dessa  $\frac{n}{2}$  delar får vi Simpsons formel

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

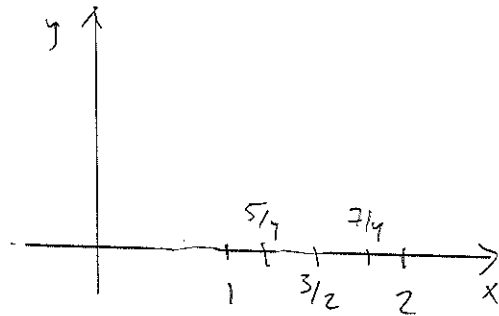
$$h = \frac{b-a}{n}$$

Ex:  $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . Beräkna  $S_4$

Kom ihåg:  $I = \ln 2 = 0,69314718\dots$

$$S_4 = \frac{1/4}{3} \left( 1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 0,69325397$$



Notera att Simpsons formel använder samma punkter som trapez + mittpunkt.

Man kan visa att

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3}$$

### Sats 6,5

Om  $f$  har fyra kontinuerliga derivator på  $[a, b]$  och  $|f^{(4)}(x)| \leq K$

$$\text{Så gäller } \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)^4}{180} h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Bem: Inger ej i kursen.

Notera att felet i Simpsons metod är proportionellt mot  $\frac{1}{n^4}$ .

Trapez och Mittpunkt har  $\frac{1}{n^2}$ .

Ex 2: Beräkna en örnbegränsning  
av Lelet  $\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_4 \right|$

För att få rätt konstant behöver  
vi beräkna  $f^{(4)}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| \leq 24$$

$$K = 24$$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_4 \right| \leq \frac{24 \cdot 1^5}{180 \cdot 4^4} \approx 0,00052083$$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_8 \right| \leq 0,00003255$$

\* Sammanfattning av Kapitel 6

Viktiga satser:

- Sats 6.2  $p$ -integraler
- Sats 6.4 Mittpunkt, trapez
- Sats 6.5 Simpson's felbegränsning

Övriga viktiga punkter

- Partiell integration
- Substitution för att beräkna  
integraler
- Numerisk lösning av integraler