

Idag:

- * Centroider
- * Tillämpningar av integralen
- * Introduktion till differentialkvantiteter

Kap 7.5-7.6, 7.9

* Centroider

Om materien är utspridd jämnt i ett område så att densiteten ρ är konstant beror bara masscentrum på objektets form. Denna punkt kallas objektets centroid.

Låt $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ utgöra ett område i \mathbb{R}^2 då är centroiden (\bar{x}, \bar{y})

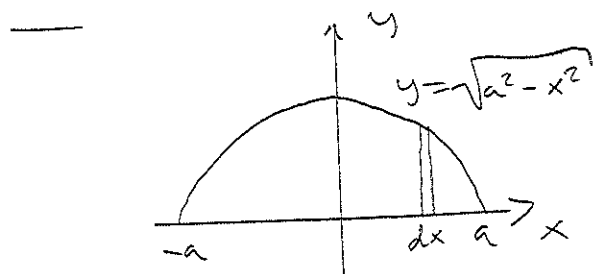
$$\bar{x} = \frac{M_{y=0}}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_{x=0}}{A} \quad \text{och}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad M_{x=0} = \int_a^b x f(x) dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx$$

Ex: Låt $-a \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$

Beräkna Centroiden.



$A = \frac{1}{2} \pi a^2$, en halv cirkel

$$M_{x=0} = \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = 0 \text{ ej konstigt!}$$

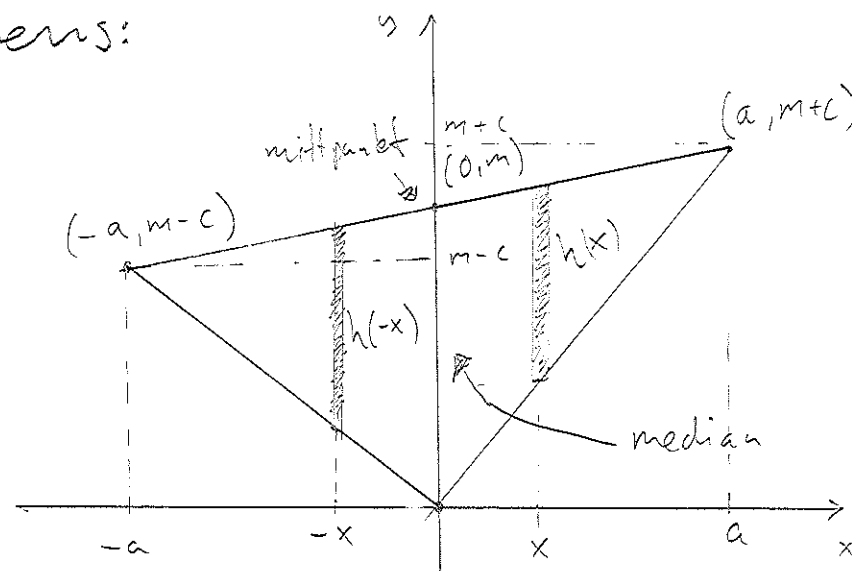
$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} 2a^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{4a}{3\pi}$$

Sats 7.1 Centroiden av en triangel.

Centroiden av en triangel är punkten där medianerna skär varandra.

Beräns:



Vi noterar att $h(-x) = h(x)$.

(Notera att $h(x) = m \frac{a+x}{a}$, $x < 0$, $h(x) = m \frac{a-x}{a}$, $x > 0$)

Därför är $dM_{x=0} = -x h(-x) + x h(x) = 0$

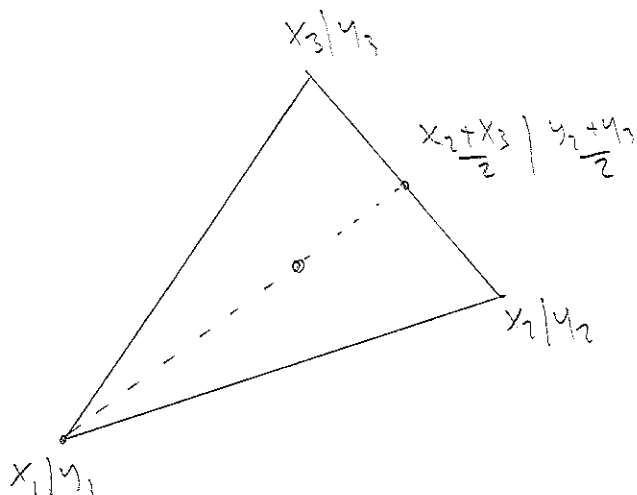
Momentet runt $x=0$ är alltså

$$M_{x=0} = \int_{-a}^a dM_{x=0} = 0, \text{ alltså centroiden ligger på medianen.}$$

Samma argument ger att centroiden ligger på alla tre medianer vilket innebär att den ligger i punkten som skärs av de tre medianerna. \square

Låt (x_1, y_1) , (x_2, y_2) och (x_3, y_3) vara hörnkoordinaterna i en triangel där (\bar{x}, \bar{y}) är centroidens koordinater

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$



Låt $0 \leq s \leq 1$ vara en parameter.

Punkterna på medianen kan skrivas som $(sx_1 + (1-s)\frac{x_2+x_3}{2}, y_1 + (1-s)\frac{y_2+y_3}{2})$, $0 \leq s \leq 1$

Låt $s = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$
 Samma argument kan användas på alla tre medianer visar att (\bar{x}, \bar{y}) ligger på alla medianer.

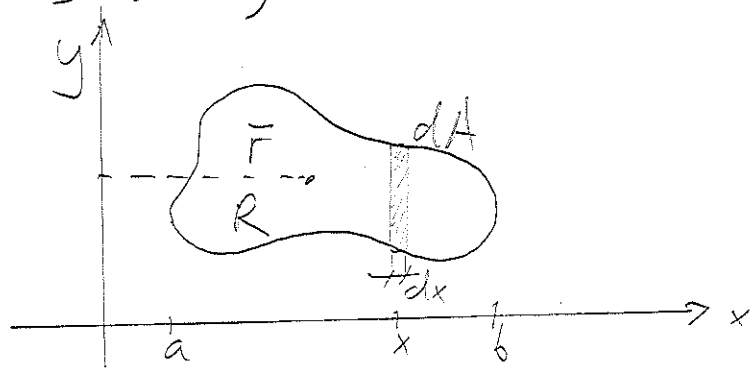
Sats 7.2 Pappus's sats

(a) Om ett område i planet R roteras runt en linje L så är

Volymen hos den genererade kroppen arean av R gånger längden som centroiden färdats

$$V = 2\pi \bar{r} \cdot A, \quad \bar{r} \text{ är vinkelrätt avståndet mellan centroiden av } R \text{ och } L.$$

b) Om en kurva C i planet på ena sidan av en linje L roteras runt linjen och genererar en rotationsyta så är arean av ytan $S = 2\pi \bar{r} \cdot s$, där s är längden på C och \bar{r} är vinkelrikt avståndet mellan centroiden och linjen L .
 Bevis av a)

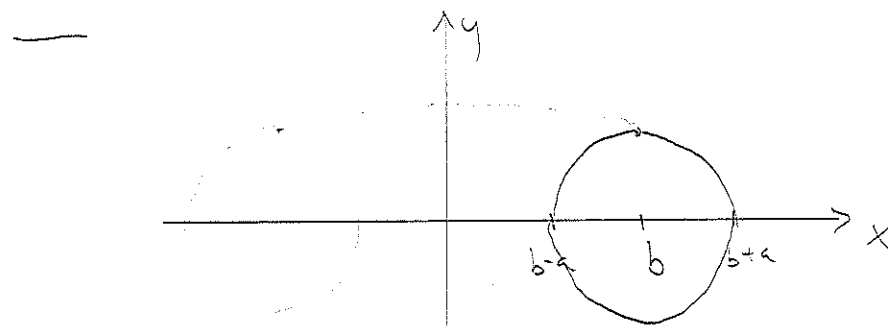


Vi väljer koordinatsystemet så att L är y -axeln och låt R bestå sig mellan $x=a$ och $x=b$.

Det gäller att $\bar{r} = \bar{x}$, x -koordinaten av centroiden $\approx R$.

Volymen $V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x dA = 2\pi M_{x=0} = 2\pi \bar{x} A = 2\pi \bar{r} A$

Ex: Använd Pappas sats för att beräkna volymen av en torus (doughnut) given av den roterande disken $(x-b)^2 + y^2 \leq a^2$ runt y -axeln, $0 < a < b$



Centroiden är $(b, 0)$, arean är πa^2

$\Rightarrow V = 2\pi \cdot b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$

* Integralens tillämpningar

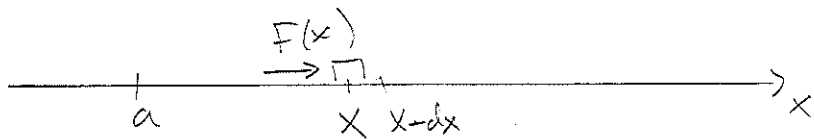
Arbete = kraft \times väg

Givet en kraft i x -axelns riktning som flyttar ett objekt från $x=a$ till $x=b$

Låt kraften variera med x , $F = F(x)$

$$F(4) = k \cdot 4 = 2000 \Rightarrow k = \frac{2000}{4} = 500 \text{ N/cm}$$

$$W = \int_0^4 k \cdot x \, dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 500 \cdot \frac{4^2}{2} = 4000 \text{ Nm} = 40 \text{ J}$$

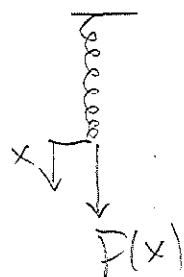


Arbetet för att flytta objektet från x till $x+dx$

är $dW = F(x) dx \Rightarrow$

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW = \int_a^b F(x) dx$$

Ex: Hook's lag



Kraften som krävs
för att dra fjädern är

$$F(x) = k \cdot x$$

↑ fjäderkonstant

Om 2000 N krävs för att dra ut
fjädern 4 cm, hur mycket arbete har
utförts?

* Första ordningens differentialekvation

Modell för population av djur med
begränsad föda.

$$\frac{dy}{dt} = ky \left(1 - \frac{y}{L}\right),$$

$y(t)$ är populationen

t är tid

k är en konstant som beskriver reproduktions

L är det antal individer som kan
leva av den föda som finns.

Detta är en differentialekvation av första ordningen eftersom första derivatan ingår. Vidare är den separabel eftersom

$$\frac{L dy}{y(L-y)} = k dt$$

Vi integrerar på båda sidor

$$\int \frac{L dy}{y(L-y)} = \int k dt = k \cdot t + C$$

Vi har $\frac{L}{y(L-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{L-y} \Rightarrow$

$$L = (L-y)A + yB \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= -A + B \Rightarrow B = A \\ L &= LA \Rightarrow A = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{L dy}{y(L-y)} = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y} dy = k \cdot t + C$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln(L-y) = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C$$

$$\frac{y}{L-y} = e^{kt+C} = C_1 e^{kt} \Rightarrow y = (L-y) C_1 e^{kt}$$

$$y = \frac{C_1 L e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}, \quad C_1 = e^C$$

1 allmänhet har vi

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Ex: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$$\int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = C$$

* Sammanfattning av Kapitel 7.

- Sats 7.1 triangelns centroid
- Sats 7.2 a) Pappus sats

Viktiga moment.

- Volym av rotations kroppar
- Båglängder, ytanor
- mass centrum
- centroider
- Separatla differentialekvationer