<u>Idag</u>:
- * Klassificering av differentialekvationer
- * Lösa första ordningens differentialekvationer
- * Existens och entydighet av lösning
- * Numerisk approximation

Kapitel 18.1 - 18.3

* Klassificering av differentialekvationer

En differentialekvation (DE) är en ekvation som innehåller en eller flera derivator av en okänd funktion.

<u>Ex</u>: Newtons andra lag

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

En <u>ordinär</u> DE är en DE som bara har derivator med avseende på en variabel, tex Newtons andra lag.

En <u>partiell</u> DE är en DE som har derivator med avseende på flera variabler.

Ex: En dimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$, $u(x,t)$ är förskjutning i en vibrerande sträng.

En ODE har ordning n om den högsta ordningens derivata som förekommer i ekvationen är n.

Ex: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$

ordning 2

$\frac{d^3y}{dx^3} + y^4 = \sin x$, ordning 3

En linjär ODE kan skrivas på formen

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

En linjär ODE är homogen om $f(x)=0$, annars inhomogen.

Sats 18.1

Om y_1 och y_2 är lösningar till samma linjära homogena ODE

$$(*)\quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

så är även varje linjärkombination

$y = Ay_1(x) + By_2(x)$ lösning.

Bevis: Sätt in $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ i $(*)$

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = A(a_n(x)y_1^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_1) + B(a_n(x)y_2^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_2) = 0.$$

Sats 18.2

Om y_1 löser $(*)$ och y_2 löser

$$(**)\quad a_n(x)y_2^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_2 = f(x)$$

så löser även $y = y_1 + y_2$ $(**)$.

Bevis: Vi sätter in y_1+y_2 i (**)

$$a_n(x)(y_1+y_2)^{(n)}+\dots+a_0(x)(y_1+y_2)=$$

$$=\underbrace{a_n(x)y_1^{(n)}+\dots+a_0(x)y_1}_{0}+\underbrace{a_n(x)y_2^{(n)}+\dots+a_0(x)y_2}_{f}$$

$$=f(x) \quad \blacksquare$$

* Lösa första ordningens DE

Linjära:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

Om $q(x)=0 \Rightarrow$ separabel $\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$

I allmänhet används integrerande faktor. Låt $P(x)=\int p(x)dx$ vara primitiv till $p(x)$.

Vi noterar att

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{P(x)}y\right)=p(x)e^{P(x)}y+e^{P(x)}y'=$$

$$=e^{P(x)}q(x)$$

$$e^{P(x)}y=\int e^{P(x)}q(x)\,dx \text{ eller}$$

$$y(x)=e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)\,dx$$

Ex: $\frac{dy}{dx}+xy=x^3$

$$p(x)=x \Rightarrow P(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x^2}{2}}y\right)=xe^{x^2/2}y+e^{x^2/2}y'=x^3e^{x^2/2}$$

$$e^{x^2/2}y(x)=\int x^3e^{x^2/2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Partiell integration}\\ u=x^2 \quad v=e^{x^2/2}\end{array}\right\}$$

$$=\int u\cdot\frac{dv}{dx}dx=u\cdot v-\int\frac{du}{dx}\cdot v\,dx=$$

$$=x^2e^{x^2/2}-2\int xe^{x^2/2}dx=x^2e^{x^2/2}-2e^{x^2/2}+C$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}.$$

– DE på formen $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Låt $v = \frac{y}{x}$ eller $y = xv(x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ vi får

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{f(v)-v}{x}$$

som är separabel $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$.

Ex: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x\cdot y}{xy+y^2}$

Låt $y = v\cdot x \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+xy}{xy+y^2}$

$= \left\{\begin{array}{l}\text{dividera med} \\ x^2 \text{ uppe och nere}\end{array}\right\} = \frac{1+v}{v+v^2} = \frac{1}{v}$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \Rightarrow \int \frac{v}{1-v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{v}{1-v^2}\,dv = \left\{\begin{array}{l}u = 1-v^2 \\ du = -2v\,dv\end{array}\right\}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C$

$\ln|x|^2 = \ln(|u|^{-1}) + C \quad |x|^2 = \frac{C}{|u|}$

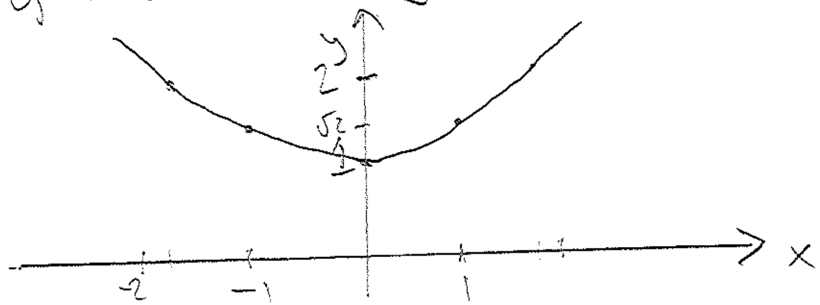
$\Rightarrow |1-v^2| = \frac{C}{x^2}$ eller $\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right| = \frac{C}{x^2}$

$\Rightarrow |x^2-y^2| = C$ eller $x^2-y^2 = C'$.

– Givet ytterligare information, t ex

$y(0) = 1 \Rightarrow 0^2 - 1^2 = C' \Rightarrow C' = -1$

$y^2 = x^2+1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2+1}$



* Existens och entydighet

Vi studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Sats 18,3</u> Existens och entydighet

Antag $f(x,y)$ och $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ är kontinuerliga på en rektangel av formen $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ innehållande punkten (x_0, y_0). Då finns ett $\delta > 0$ så att det i intervallet $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ finns en unik entydig lösning $y(x)$.

<u>Ex</u>: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Har lösning $y(x) = \frac{1}{1-x}$ eftersom $y' = \frac{1}{(1-x)^2} = y^2$ och $y(0) = 1$. Trots att $f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga existerar bara lösningen för $x < 1$.

<u>Ex</u> $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Har två lösningar $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 0$.

Vi har dock att $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y^{-1/3}$ och är <u>ej</u> kontinuerlig i $y = 0$.

* Numeriska metoder

Vi studerar nu approximativa lösningar till
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Vi skapar en sekvens av punkter x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ... där h kallas steglängd.

En numerisk (enstegs) metod ger en formel för $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ givet y_n.

- Eulers metod

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

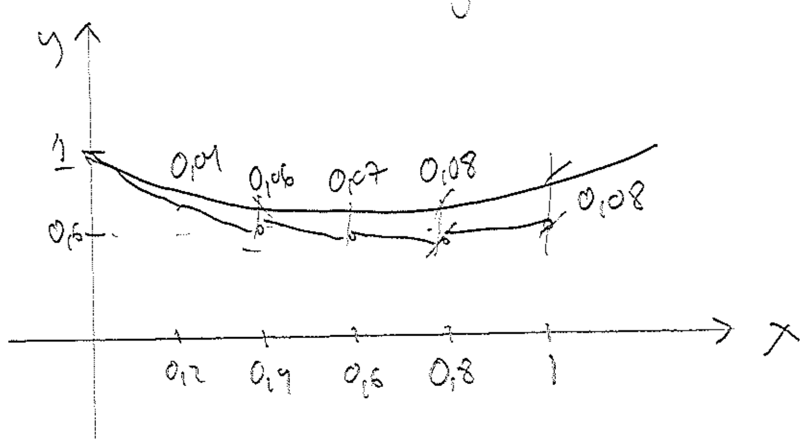
Ex:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Beräkna en approximativ lösning i $[0,1]$ med steglängd $h = 0,2$.

$x_n = \frac{n}{5}$, $n = 0,1,2,\ldots,5$

$$y_{n+1} = y_n + 0,2(x_n - y_n) = 0,8y_n + 0,04n$$

Den exakta lösningen ges av $y = x - 1 + 2e^{-x}$



$y_0 = 1$, $y_1 = 0,8$, $y_2 = 0,68$, $y_3 = 0,624$, $y_4 = 0,6192$
$y_5 = 0,65536$