

- Idag:
- * Andra ordningens
differential ekvation
 - * Fallet med konstanta
koefficienter

Kapitel 18, 4, 3, 7

* Differentialekvation av 2:a ordningen
En ODE (ordinär differential ekvation)
av andra ordningen har formen

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

för någon funktion F av fyra variabler.
Lösningen av ekvationen kräver tre
integreringar \Rightarrow 2 obestämda konstanter.

- Ekvationer som kan reduceras
till första ordningens ODE

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0 \quad (\text{ej beroende } y^2)$$

$$\text{Låt } v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$$

Givet lösningen till denna 1:a ordn.
ODE för vi $y = \int v(x) dx$

Ex: $\frac{d^2 y}{dx^2} = x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ $y(0) = 1, y'(0) = -2$

Låt $v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x v^2$

Denna ODE är separabel lördn.

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow v = -\frac{2}{x^2 + C_1}$$

$$-2 = y'(0) = v(0) = -\frac{2}{C_1} \Rightarrow C_1 = 1$$

begynnelse villkor $y(x) = -2 \int \frac{dx}{1+x^2} = -2 \arctan x + C_2$

$$1 = y(0) = -2 \arctan 0 + C_2 = 0 + C_2 \Rightarrow$$

↑
begynnelse villkor $C_2 = 1$

$$\therefore y(x) = 1 - 2 \arctan x$$

$F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$ (ej beror på x)

Kan också reduceras till 1:a ordningen.

Låt $v = \frac{dy}{dx}$.

Notera att $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{dv}{dy}$

av kedjeregeln eftersom $v = v(y)$

$F\left(v \frac{dv}{dy}, v, y\right) = 0$ som är en 1:a ordningen. Sedan kan vi alltid lösa

$$\frac{dy}{dx} = v(y) \text{ för } y(x)$$

Ex: Lös $y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

Låt $v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y v \frac{dv}{dy} = v^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln|y| + C$$

$$\Rightarrow v = Cy, \quad \frac{dy}{dx} = Cy \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int C dx = Cx + D$$

$$\ln|y| = Cx + D \Rightarrow y = \pm e^{Cx+D} = C' e^{Cx}$$

* Linjära 2:a ordningens ODE

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x)$$

Om $f(x) = 0$ kallas ekvationen homogen.

Med $f(x) = 0$, $a_2 \neq 0$, a_i kontinuerliga
gäller att $a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$

har lösningar på formen

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ där}$$

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \text{ för alla } x$$

$$\Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0, \quad y_1 \& y_2 \text{ är oberoende.}$$

Givet en lösning y_1 , till en

homogen 2:a ordningens ekvation
ges en annan oberoende lösning

av att substituera $y = v(x)y_1$
i ekvationen och beräkna $v(x)$.

Ex: Visa att $y_1 = e^{-2x}$ löser
 $y'' + 4y' + 4y = 0$ och ta fram
 den allmänna lösningen.

$$y_1' = -2e^{-2x}, \quad y_1'' = 4e^{-2x} \Rightarrow$$

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x}(4 - 8 + 4) = 0$$

$$\text{Låt } y = e^{-2x}v(x) \Rightarrow y' = -2e^{-2x}v + e^{-2x}v'$$

$$y'' = 4e^{-2x}v - 2e^{-2x}v' - 2e^{-2x}v' + e^{-2x}v'' \\ = e^{-2x}(4v - 4v' + v'')$$

Vi sätter in detta i ekvationen

$$0 = y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(4v - 4v' + v'' - 8v \\ + 4v' + 4v)$$

$$= e^{-2x}v'' \Rightarrow v(x) = C_1 + C_2x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$y_2 = x e^{-2x}$
oberoende av y_1

Den allmänna lösningen till en
 2:a ordningens linjär ODE kan
 skrivas som summan av den allmänna
 lösningen till den homogena ekvationen
 plus en lösning till den inhomogena

$$y = y_p + y_h$$

↑ ↑
partikulärlösning homogen lösning

* 2:a ordningens linjär ODE med
 konstanta koefficienter

Vi studerar $ay'' + by' + cy = 0$, där
 $a \neq 0$, $y = y(t)$.

Vi antar en lösning på formen

$$y(t) = e^{r \cdot t} \Rightarrow$$

$$(ar^2 + br + c)e^{r \cdot t} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Lösningen till andragsgradsekvationen är

$$r = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi studerar tre fall

$$(i) \quad b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ är den allmänna lösningen.

$$(ii) \quad b^2 = 4ac \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = r$$

En lösning ges då av e^{rt} . Den andra får vi genom $y = e^{rt} u(t)$

$$y' = r e^{rt} u + e^{rt} u'$$

$$y'' = r^2 e^{rt} u + r e^{rt} u' + r e^{rt} u' + e^{rt} u''$$

$$= e^{rt} (r^2 u + 2ru' + u'')$$

\Rightarrow insatt i ekvationen \Rightarrow

$$0 = ay'' + by' + cy = e^{rt} (ar^2 u + 2aru' + au'' + bru + bu' + cu) =$$

$$= e^{rt} (au'' + (2ar + b)u' + (ar^2 + br + c)u)$$

Vi har $ar^2 + br + c = 0$ och $2ar = -b$

$$\Rightarrow 0 = e^{rt} au'' \Rightarrow u = A + Bt$$

$$\Rightarrow y = Ae^{rt} + Bte^{rt}$$

$$(iii) \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = k \pm iw,$$

$$k = -\frac{b}{2a}, \quad w = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$\tilde{y}_1 = e^{(k+iw)t} \quad \text{och} \quad \tilde{y}_2 = e^{(k-iw)t}$$

De är oberoende men komplexvärda.

För att få reella lösningar låter vi

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \tilde{y}_1(t) + \frac{1}{2} \tilde{y}_2(t) = e^k \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2} = e^{kt} \cos wt$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)) = e^{kt} \sin wt$$

$$y = A e^{kt} \cos \omega t + B e^{kt} \sin \omega t$$

Ex: Lös $y'' + y' - 2y = 0$

Vi har att den karakteristiska
ekvationen $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow$
 $(r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, r_2 = 1$

$$y = A e^{-2t} + B e^t$$

Ex: Lös $y'' + 6y' + 9y = 0$

Vi har $(r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -3$

$$y = A e^{-3t} + B t e^{-3t}$$