

Idag

* Geometri i 3D

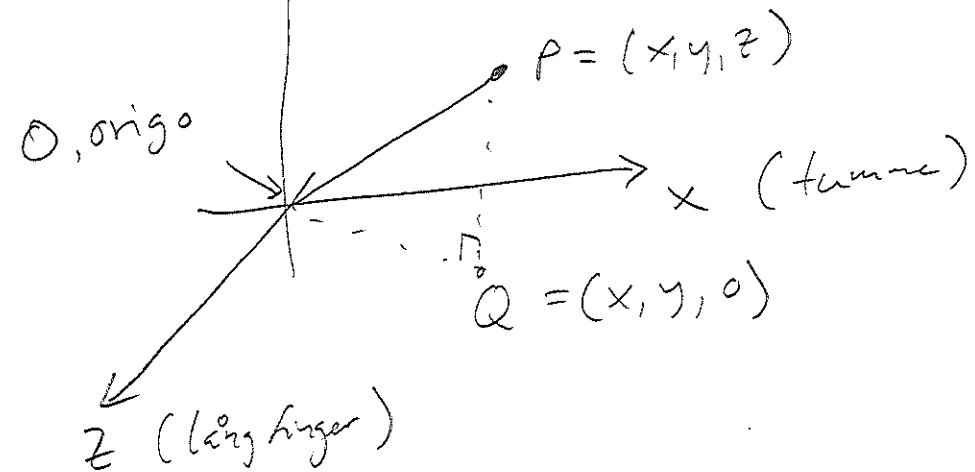
* Vektorer

* Skalär och kryssprodukt

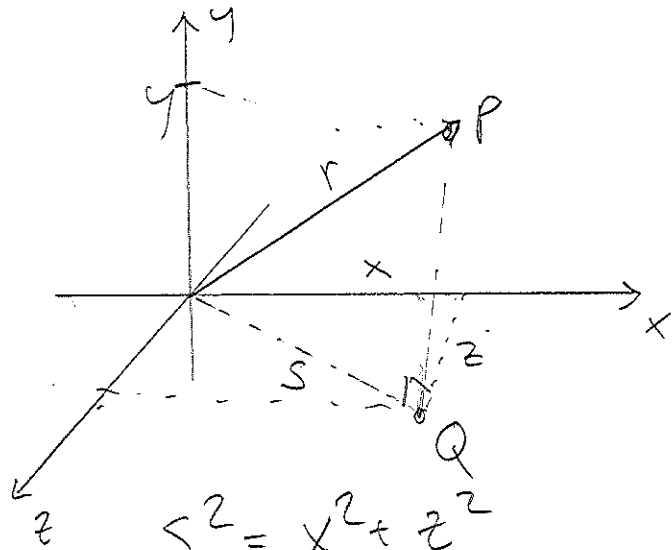
Kapitel 10.1-10.3

* Geometri i 3D

Högerorienterat koordinatsystem



Avståndet mellan O och P
 ges av att först beräkna avståndet
 mellan O och Q med Pythagoras
 Sats och sedan O till P igen
 med Pythagoras



$$s^2 = x^2 + z^2$$

$$r^2 = y^2 + s^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avståndet mellan två punkter

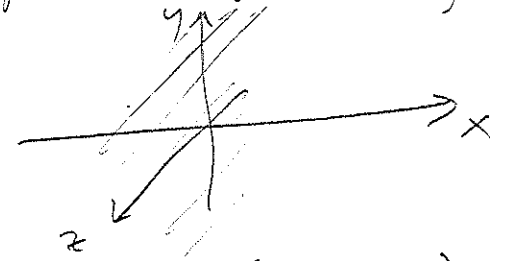
i $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

ges av

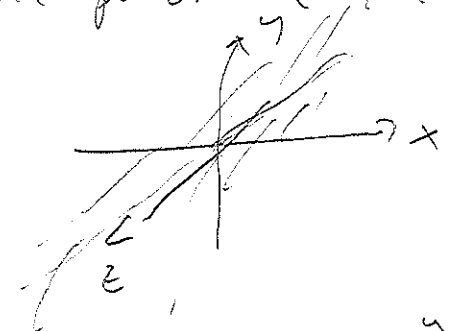
$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

* ytor beskrivna av ekvationer

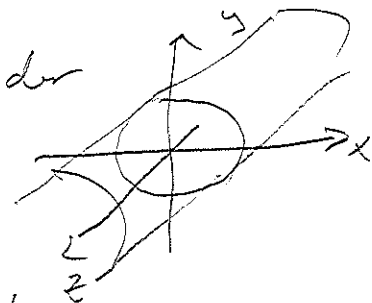
a) $x=0$, alla punkter $(0, y, z)$,
yz - planet



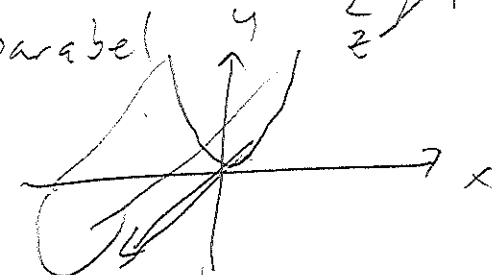
b) $x=y$, alla punkter (x, x, z)
ochskärningsplan

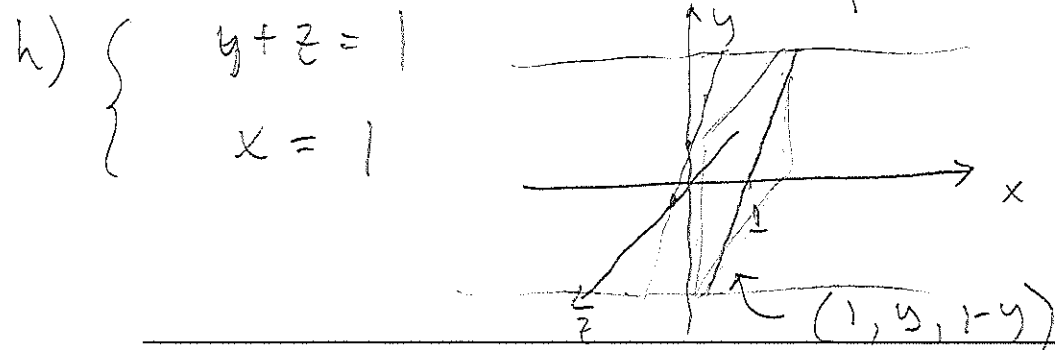
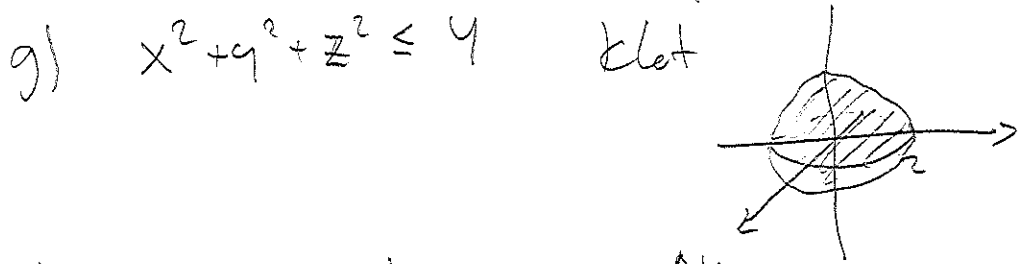
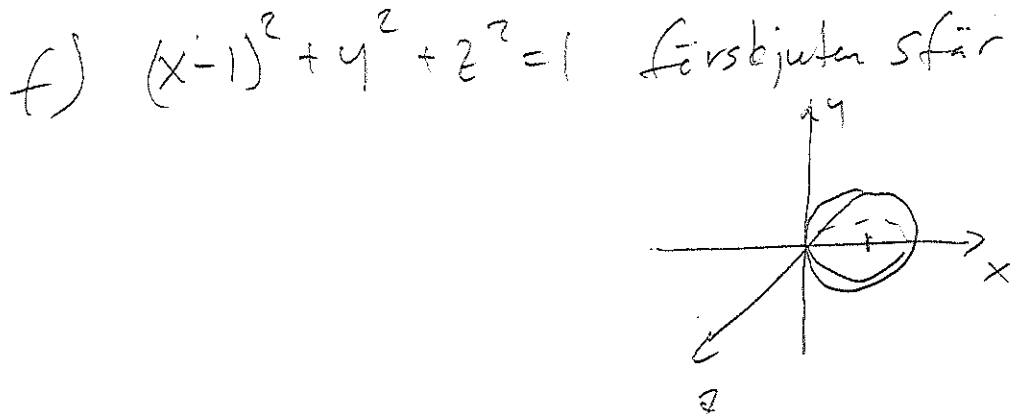
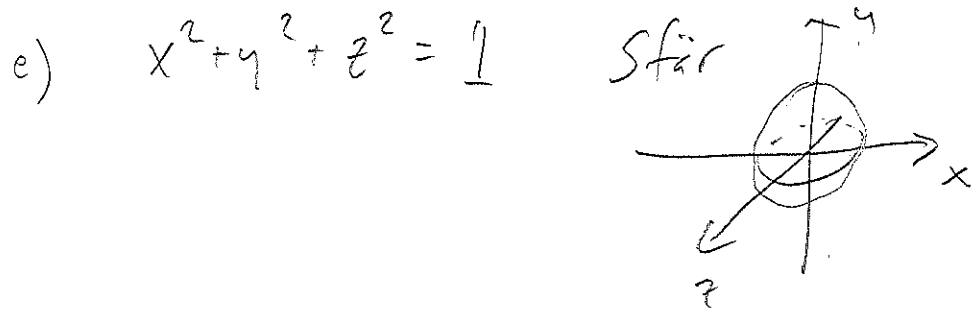


c) $x^2 + y^2 = 1$ cylindrar



d) $y = x^2$ parabel

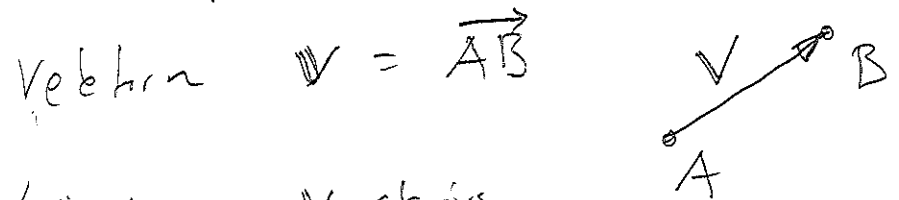




* Vektorer

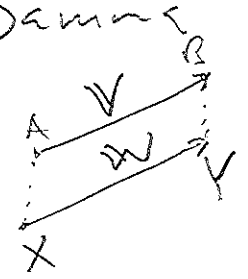
Vektorer har både storlek och riktning

Givet punkter A, B skriver vi



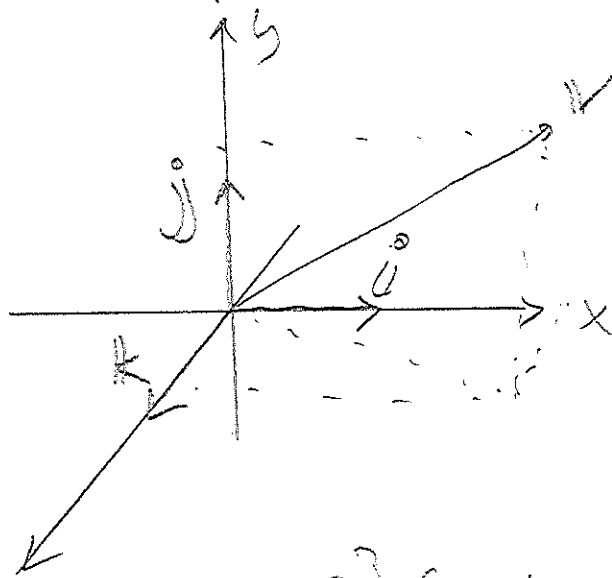
Längden av \mathbf{v} skrivs $|\mathbf{v}|$ och är avståndet mellan A och B

Vektorer har i allmänhet inte position, \mathbf{v} och \mathbf{w} anses lika om de har samma riktning och längd



- En hetsvektor

Vi låter i, j, k vara vektorer av längd 1 och riktning x -axeln, y -axeln respektive z -axeln



Alla vektorer i \mathbb{R}^3 (3 dimensionella rummet) kan då skrivas som

$$v = x i + y j + z k, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

eller kortare $v = [x \ y \ z]$

Vi har att $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

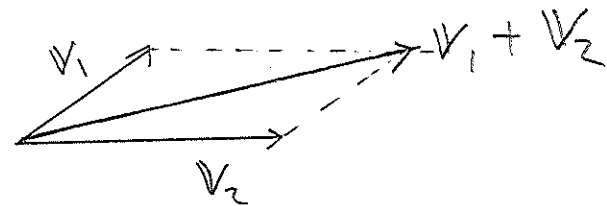
- Addition av vektorer

Låt $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ och

$$v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

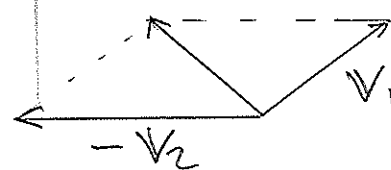
då gäller $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) i + (y_1 + y_2) j + (z_1 + z_2) k$

Geometriskt har vi



- Subtraktion av vektorer

$$v_1 - v_2 = (x_1 - x_2) i + (y_1 - y_2) j + (z_1 - z_2) k$$



- Räknelagar:

$$u + v = v + u$$

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$$\pm(u + v) = \pm u + \pm v$$

$$u - v = u + (-1)v$$

Följer direkt genom att skriva

$$u = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \quad v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

* Multiplikation av vektorer

- Skalärprodukt av två vektorer

$$\text{Låt } u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, \\ v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{tal, skalär}$$

- Räknelagar

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$(\pm u) \cdot v = u \cdot (\pm v) = \pm(u \cdot v)$$

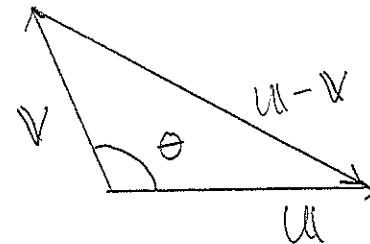
$$u \cdot u = |u|^2$$

Sats 10.1

Om $0 \leq \theta \leq \pi$ är vinkeln mellan två vektorer u och v då gäller $u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$

Speciellt gäller $u \cdot v = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
vinkelräta.

Beris



Cosinussatsen ger

$$|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u| |v| \cos \theta$$

Å andra sidan

$$|u - v|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = u \cdot (u - v)$$

$$- v \cdot (u - v) = u \cdot u - u \cdot v - v \cdot u + v \cdot v$$

$$= |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v$$

$$\Rightarrow |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v = |u|^2 + |v|^2 - 2|u| \cdot |v| \cos \theta$$

$$\Rightarrow u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos \theta$$

- Kryss produkt av två vektorer i \mathbb{R}^3

$$\text{Låt } u = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k},$$

$$v = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{k}$$

vektor

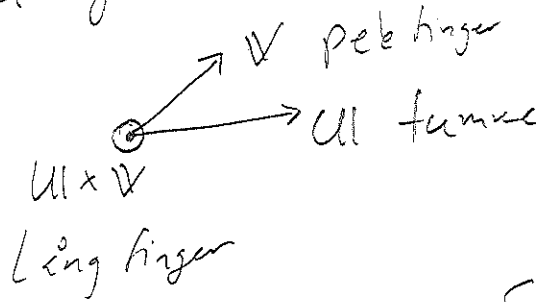
Denna produkt har följande egenskaper

(i) $u \times v$ är vinkelrät mot både u och v

(ii) Längden är given av $|u \times v| = |u| \cdot |v| \sin \theta$

där θ är vinkeln mellan u och v .

(iii) Riktningen följer ett högersystem



Beris: Inger ej, se Sats 10.2

- Räkne regler

$$u \times u = 0$$

$$u \times v = -v \times u$$

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$

$$t u \times v = u \times (t v) = t u \times v$$

$$u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$$