Idag:

* Laplace transform av derivator och integraler
* Tillämpning av Laplace transform, integraler, ODE

Föreläsningsanteckningar

* Laplace transform av derivator

Om $f(t)$, $t \geq 0$, är deriverbar, $|f(t)| \leq Ce^{at}$, gäller $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$, $\operatorname{Re}(s) > a$, ($F(s)$ är Laplace transform till $f(t)$), eftersom

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt =$$

$$= \left[f(t) e^{-st} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + sF(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$\uparrow$

$\operatorname{Re} s > a$

$$|f(t) e^{-(x+iy)t}| \leq |e^{-xt} e^{-iyt} e^{at}|\, C = Ce^{-(x-a)t}$$

$\to 0 \quad t \to \infty$

Högre ordnings derivator fås via upprepning av formeln

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) =$$

$$= s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Allmänna fallet ges av

$$\mathcal{L}(f^{(k)}) = s^k F(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} f^{(i-1)}(0)$$

T ex $\mathcal{L}(f^{(3)}) = s^3 F(s) - \sum_{i=1}^{3} s^{3-i} f^{(i-1)}(0)$

$$= s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Ex: Låt $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t$

Kom ihåg $F(s) = \frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re} s > 1$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0) = \frac{s}{s-1} - 1$$

$$= \frac{s - (s-1)}{s-1} = \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(f(t))$$

* Laplacetransform av integral

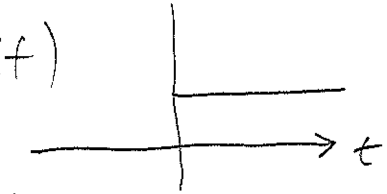
Låt $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ s.a. $|g| \le Ce^{at}$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}_{g(t)}\, dt =$$

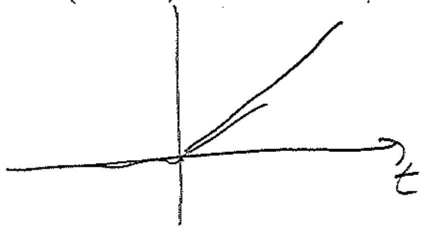
$$= \underbrace{\left[\frac{-1}{s} e^{-st} g(t)\right]_0^\infty}_{\operatorname{Re}(s)>a \;\to 0\; t\to\infty \quad g(0)=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} g'(t)\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s} F(s).$$

Ex: Låt $f(t) = \theta(t)$



$$\Rightarrow \quad g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t>0 \end{cases}$$



$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s^2}$$

tidigare $\mathcal{L}(\theta(t)) = \frac{1}{s}$

* Faltning

Låt $h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \left\{ \text{byt ordning} \right\} = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\,dt\,d\tau$$

byt ordning

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Låt } \bar{t} = t-\tau \\ \quad d\bar{t} = dt \end{array} \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\bar{t}+\tau)} f(\tau) g(\bar{t})\,d\bar{t}\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} g(\bar{t})\,d\bar{t} =$$

$$= F(s) \cdot G(s)$$

* Multiplikation med t

Låt $g(t) = t f(t)$

$\Rightarrow G(s) = -F'(s)$ eftersom

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty t\,e^{-st} f(t)\,dt = -G(s).$$

Ex: $\mathcal{L}(te^{-t}) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

$$\mathcal{L}(t^2e^{-t}) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

* Tillämpningar av Laplacetransform

Ex: ODE: $y'' + 2y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Laplace transform ger

$$s^2 Y - s\underbrace{y(0)}_{=0} - y'(0) + 2sY - 2\underbrace{y(0)}_{=0} + Y = \mathcal{L}(e^{-t})$$

$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y - 1 = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + te^{-t}$

Ex: $y' + y(t) = f(t)$, $y(0) = A$

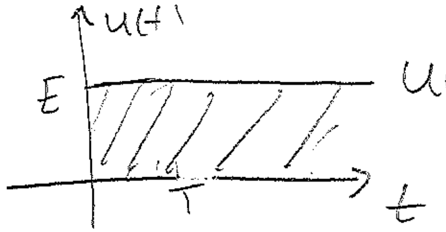
$$sY(s) - y(0) + Y(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow (s+1)Y(s) - A = F(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{s+1}}_{\frac{1}{s+1}\cdot F(s) \;\to\; \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau} + \underbrace{\frac{A}{s+1}}_{Ae^{-t}}$$

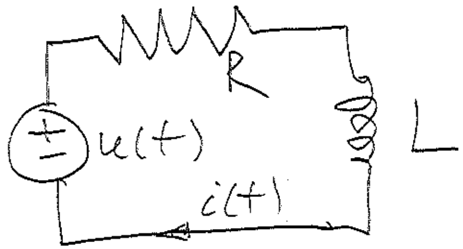
$$y(t) = Ae^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$$

Ex: En spole med resistans R och induktans L är kopplad till en generator med spänning $u(t)$ där



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ E, & t>0 \end{cases}$$

Strömmen betecknas $i(t)$.



ges som lösning till ekvationen

$$Ri + L\cdot\frac{di}{dt} = u(t) = E, \quad i(0) = 0$$

Beräkna $i(t)$ med Laplace transform

Lösn. Vi har

$$RI(s) + LsI(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{E}{s}$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{E}{s(R+Ls)} = \frac{E/L}{s(s+\frac{R}{L})}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{R}{L}}, \quad A(s+\tfrac{R}{L}) + Bs = \frac{E}{L}$$

$$\Rightarrow 1: A\frac{R}{L} = \frac{E}{L} \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

$$s: A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{E}{R}$$

$$I(s) = \frac{E/R}{s} - \frac{E/R}{s+\frac{R}{L}} \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\theta(t) - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Sammanfattning Laplacetransform

- Definition av Laplacetransformen
- Beräkning av Laplacetransformer
- Skalning
- Laplacetransform av derivata
- Laplacetransformen av integral
- Faltning
- Lösning av ODE med Laplacetransform