Idag: * Övningstentan

10 uppgifter med endast svar (3p)

4 uppgifter med fullständiga lösningar (5p)

Max 50p (+7 bonus)

Betygsgränser: 3 (20p)
4 (30p)
5 (40p)

Inga hjälpmedel

Uppgift 1

Låt $f(x)=x$ och $P=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}$ vara en partition av $[0,1]$. Beräkna den övre Riemannsumman.

Lösn:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i \quad \text{där } \Delta x_i=\frac{1}{n},\ x_i=\frac{i}{n}$$

$u_i\in[x_{i-1},x_i]$ den punkt där f antar sitt maximala värde på $[x_{i-1},x_i]$.

I detta fall $u_i=x_i$ eftersom $f(x)$ är växande

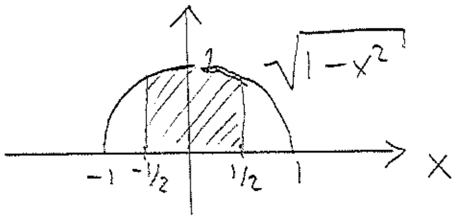
$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}.$$

Uppgift 3

Beräkna $I = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Lösn.



$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin\theta \\ \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2 \int_{0}^{-\pi/6} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Uppgift 5

Lös differentialekvationen

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^2, \quad y(0) = 0$$

Lösn.

Vi använder integrerande faktor

$$\left(y e^{x^3/3}\right)' = y' e^{x^3/3} + x^2 y e^{x^3/3} = x^2 e^{x^3/3}$$

Vi integrerar

$$y(x) e^{x^3/3} - y(0) e^{0^3/3} = \int_0^x t^2 e^{t^3/3}\, dt =$$

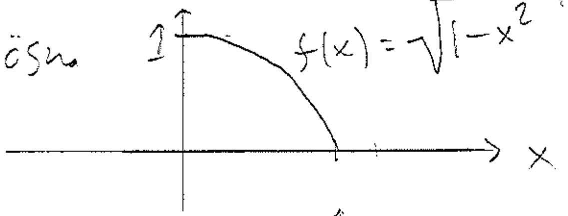
$$= \left[e^{t^3/3} \right]_0^x = e^{x^3/3} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 1 - e^{-x^3/3}}$$

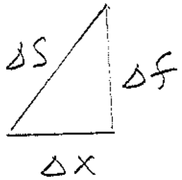
Uppgift 6

Beräkna längden av grafen till funktionen $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$.

Lösn.



Vi har



$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta f)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} x &= \sin t \\ \frac{dx}{dt} &= \cos t \end{aligned} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{\cos t}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Ej förvånande eftersom cirkelns omkrets är 2π och detta är en kvartscirkel.

Uppgift 8

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ x - y + z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 3 \end{cases}$$

Lösn.

Från tredje ekvationen får vi

$$y = 3 - 2z$$

Andra ekvationen ger

$$x = y - z = 3 - 2z - z = 3 - 3z$$

Insättning i första ekvationen

$$3 - 3z + 3 - 2z + 3z = 4 \Rightarrow$$

$$-2z = -2 \Rightarrow z = 1$$

$$y = 3 - 2z = 1$$

$$x = 3 - 3z = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}}$$

Uppgift 10

Beräkna Laplacetransformen till $\cos t$, $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos t \, dt$

Lösn

Vi har att
$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$
$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

$$\Rightarrow e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \Rightarrow$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{it} + e^{-it}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} - \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s}\right]_0^\infty$$

$$= \left\{ \lim_{t\to\infty} \left| e^{(i-s)t} \right| = 0 \quad Re(s) > 0 \,, \quad \lim_{t\to\infty} \left| e^{-(i+s)t} \right| = 0 \right\} =$$

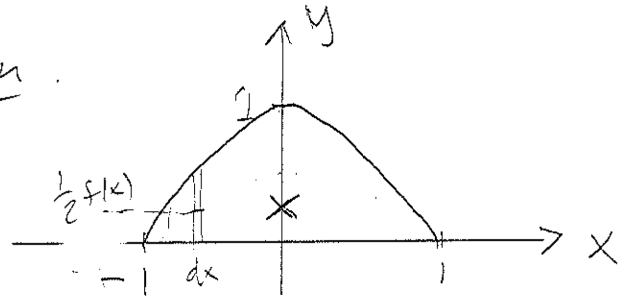
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+i+(s-i)}{(s-i)(s+i)} \right]$$

$$= \boxed{\frac{s}{s^2+1}} \,, \quad Re(s) > 0$$

Uppgift 12

Beräkna centroiden för det område i planet som begränsas av x-axeln och funktionen $f(x) = 1 - x^2$

Lösn.



Vi har att $\bar{x} = 0$ på grund av symmetri.

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} \quad \text{där} \quad m = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx \quad \text{och}$$

$$M_{y=0} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} f(x) \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x) \, dx$$

Vi får $m = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = 2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} =$

$$= \frac{4}{3} \,, \quad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx =$$

$$= \int_{0}^{1} 1 - 2x^2 + x^4 \, dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{2}{5}\right)}$$

Uppgift 14

```
h=0.1; x=0; y=1;
while x<1
    y = y+h*x*y*(1-y);
    x = x+h;
end
```

a) Vilken ekvation löse programmet?

b) Vilken numerisk metod är implementerad?

c) Vad approximerar utparametern y?

Lösn.

Första raden i loopen kan skrivas

$y_{n+1} = y_n + h x_n y_n (1-y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

$y_0 = 1$, $x_n = h \cdot n$

a;b) Framåt Euler för att lösa

(*) $z'(x) = f(x,z) = xz(1-z)$

c) y överlagras hela tiden. I sista iterationen innan vi lämnar while loopen är $x = 1$, $y = y_{10} \approx z(1)$

y approximerar $z(1)$, där z löser (*).