Extra räkneuppgifter i TMV151

December 9, 2015

Linjära ekvationssystem

X.1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

X.2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

X.3. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad + 2y + z = 7 \\ \quad - y + z = 1 \end{cases}$$

X.4 Skriv problem X.1-X.3 på matrisform, Ax=b.

X.5. Skriv följande andra ordningens ODE som ett system av två första ordningens ODE'er,

$$y'' - 2y' - 3y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Skriv systemet på matrisfrom. Beräkna lösningen.

X.6. Skriv följande andra ordningens ODE som ett system av två första ordningens ODE'er,

$$y'' + \sin(y) = x\cos(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Lös ej ekvationen.

X.7. Skriv följande system av två första ordningens ODE'er som en andra ordningens ODE och beräkna lösningen,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X.8. Skriv följande system av två första ordningens ODE'er som en andra ordningens ODE. Beräkna lösningen,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X.9. (abcd) Formulera framåt Euler metoden för systemen av första ordningen från uppgifter 9-12. Låt $h = 0.1$ och beräkna lösningen efter ett steg i framåt Euler algoritmen, alltså en approximation till lösningen i $t = 0.1$.

X.10. (abcd) Formulera bakåt Euler metoden för systemen av första ordningen från uppgifter 9-12.

X.11. Visa att $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x$, för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

X.12. Härled en formel för e genom att använda bakåt Euler metoden för att lösa den differentialekvation som definierar e^x.

X.13 Visa att $\cos(x + y) = \cos x \cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ genom att definiera cos och sin som lösning till differentialekvationen $y''(x) + y(x) = 0$.

X.14 Vilken differentialekvationer uppfyller $\cosh(x)$ och $\sinh(x)$?

X.15. Finn $a, C \geq 0$ så att $|f(t)| \leq Ce^{at}$ för alla $t \geq 0$, för: (a) $f(t) = \sin(t)$, (b) $f(t) = te^{2t}$, (c) $f(t) = \log(t + 1)$, (d) $f(t) = t^3$.

X.16. Beräkna Laplace transformen av $f(t) = \cos(bt)$.

X.17. Beräkna Laplace transformen av $f(t) = e^{3t}$. För vilka s är Laplace transformen $F(s)$ definierad?

X.18. Beräkna Laplace transformen av $f(t) = \theta(t) - \theta(t - 2)$, där $\theta(t) = 0$, för $t < 0$, och $\theta(t) = 1$, för $t > 0$.

X.19. Beräkna Laplace transformen av $f(t) = t^n$. Gäller $|f(t)| \leq Ce^{at}$ för några $a, C \geq 0$?

X.20. Visa att $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$.

X.21. Använd Laplace transform för att lösa ekvationen, $y'' + 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ givet att te^{-t} har Laplace transform $(1+s)^{-2}$.

X.22. Använd Laplace transform för att lösa ekvationen, $y' + ky = t$, $y(0) = 0$, givet att t har Laplace transform s^{-2}.

Facit

X.1 $x = 1$ och $y = 2$.
X.2 $x = 1$ och $y = 1$. Ekvation 2 ger $x = y$ ekvation 1 ger $x = y = 1$.
X.3 $x = 1$, $y = 2$ och $z = 3$.
X.4
(X.1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(X.2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(X.3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(X.4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X.5 Låt $u = y$ och $\dot{u} = v$. Vi får då,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karaktäristiska ekvationen $r^2 - 2r - 3 = 0$ har lösningar $r = -1$ och $r = 3$. Homogenlösningen ges av $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ och partikulärlösningen $y_p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$. Begynnelsevillkoren ger $y(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{9} = 1$ och $y'(0) = -C_1 + 3C_2 - \frac{1}{3} = 0$ alltså $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{18}e^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$.
X.6 Låt $u = y$ och $v = u'$,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v \\ \sin(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x\cos(x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X.7 Första ekvationen ger $\dot{u} - v = 0$ alltså $v = \dot{u}$. Sätt in detta i andra ekvationen, $0 = \dot{v} + 4u = \ddot{u} + 4u$. Lösningen till ekvationen $\ddot{u} + 4u = 0$ hges av $u(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t)$ (den karaktäristiska ekvationen är $r^2 + 4 = 0$ med lösning $r_1 = 2i$ och $r_2 = -2i$ vilket ger lösningar $u(t) = C_1e^{2it} + C_2e^{-2it}$, realdelen av detta ger lösningen), begynnelsevillkoren ger $u(t) = \sin(2t)$.
X.8 Första ekvationen ger $\dot{u} + v = 0$, alltså $v = -\dot{u}$. Andra ekvationen ger då med $v = -\dot{u}$ att $\dot{v} + v^2 = -\ddot{u} + (\dot{u})^2 = 0$, $u(0) = 0$, och $\dot{u}(0) = 1$. Lösningen till $\dot{v} + v^2 = 0$ med $v(0) = 1$ ges av $v(t) = \frac{1}{1+t}$ (separabel $v^{-1} = -\int v^{-2}dv = \int dt = t + C$ medför $v(t) = \frac{1}{t+C}$, $v(0) = 1$ medför $C = 1$) $u(t) = -\int_0^t \frac{1}{1+\tau}\,d\tau = -\log(1+t) + C$, $u(0) = 0$ ger $u(t) = -\log(1+t)$.
X.9-X.10
Givet ett system av ODE på formen $\dot{x}(t) = F(x,t)$ med begynnelsevillkor $x(0) = x_0$. Framåt Euler approximationen med steglängd h ges dåav,

$$x_{n+1} - x_n = hF(x_n, t_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Bakåt Euler approximationen ges av

$$x_{n+1} - x_n = hF(x_{n+1}, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

där $t_n = n \cdot h$. Nedan är F linjär. I det fallet har vi $F(x,t) = Ax + b(t)$, där A är matris och b vektor.
(X.5)
Framåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} - u_n \\ v_{n+1} - v_n \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = 0.1\begin{bmatrix} 0 \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där , $x_n = n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots$. $[u_1, v_1] = [1, 0.3]$.
Bakåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} - u_n \\ v_{n+1} - v_n \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = 0.1\begin{bmatrix} 0 \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där , $x_n = n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots$.
(X.7)
Framåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} - u_n \\ v_{n+1} - v_n \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där , $x_n = n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots$. $[u_1, v_1] = [0.1, 1]$.
Bakåt Euler:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1}-u_n \\ v_{n+1}-v_n \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där , $x_n = n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots$.

X.11

Eftersom log är strängt växande kan vi logaritmera påda sidor utan att påverka olikheten. Visare har vi att $\log(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{dy}{y} < \int_1^{1+x} dy = x$. Vi får $n \log(1 + x/n) < x = \log(e^x)$.

X.12

Vi approximerar ekvationen $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$, med bakåt Euler metoden. Vi delar upp intervallet $(0, 1)$ i n delintervall. Vi får $y_n - y_{n-1} = y_n/n$ vilket ger $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ och därmed

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

X.14

De löser ekvationen $y''(x) = y(x)$ med begynnelsevärden $(cosh)$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$ och $(sinh)$ $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

X.15

Vi har att $1 + t \le e^t$ för alla t (för $t = 0$ har vi likhet), och därför $\log(1 + t) \le t$, $t \ge 0$, . Vi får (a) $C = 1, a = 0$ (b) $C = 1, a = 3$ (c) $C = 1, a = 1$ (d) $C = 1$, $a = 3$.

X.16

$F(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$.

X.17

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{3t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-3)t}\, dt = \frac{1}{s-3}$, $\mathrm{Re}(s) > 3$.

X.18

$F(s) = \int_0^2 e^{-st}\, dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_0^2 = (1 - e^{-2s})/s$.

X.19

$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ genom rekursion. Ja, $C = 1, a = n$.

X.20

$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = \{\bar{t} = t - \tau\} = -\int_t^0 f(t-\bar{t})g(\bar{t})\, d\bar{t} = \int_0^t f(t-\bar{t})g(t)\, d\bar{t}$.

X.21

Vi har $(s^2 + 2s + 1)Y(s) + 1 = F(s)$ detta ger $Y(s) = F(s)(1 + s)^{-2} - (1 + s)^{-2}$. Transformerar vi tillbaka får vi: $y(t) = \int_0^t f(t-\tau)\tau e^{-\tau}\, d\tau - te^{-t}$.

X.22

Vi får $Y(s) = \frac{1}{s^2(s+k)} = \frac{-1/k^2}{s} + \frac{1/k}{s^2} + \frac{1/k^2}{s+k}$. Går vi tillbaka till $y(t)$ får vi då $y(t) = -1/k^2 + t/k + e^{-kt}/k^2$.