MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Ivar Simonsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–08–14 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Ivar Simonsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–08–14 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \pi/4$.

2. Uttryck $I_{10} = \int_0^1 x^{10}e^x\,dx$ i termer av $I_9 = \int_0^1 x^9 e^x\,dx$. ($I_9$ behöver alltså inte breäknas) (3p)
Lösn. Partiell integration ger $I_10 = [x^{10}e^x]_0^1 - 10I_9 = e - 10I_9$.

3. Beräkna $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitutionen $u = 1 + x^3$ ger $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{du}{3u} = \frac{\log(2)}{3}$.

4. Använd Simpson's formel med två delintervall för att beräkna $S_2 \approx \int_0^1 x^3 - 2x\,dx$. (3p)
Lösn. Notera att Simpson är exakt for kubiska polynom. $\int_0^1 x^3 - 2x\,dx = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ och $S_2 = \frac{1}{6}(0 - 7/2 - 1) = -\frac{3}{4}$.

5. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området i xy-planet som begränsas av funktionen $y = x$ och x-axeln mellan $x = 1$ och $x = 3$ roterar runt x-axeln. (3p)
Lösn. $V = \int_1^3 x^2\pi\,dx = \frac{26\pi}{3}$.

6. Beräkna ytarean av en sfär med radie 4. (3p)
Lösn. Ytan ges av $S = 4\pi r^2 = 64\pi$. Kan tex beräknas som rotationskropp, se sidan 410 i Adams och Essex.

7. Lös differentialekvationen $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x^2$ med begynnelsevillkoret $y(2) = 4$. (3p)
Lösn. Integrerande faktor ges av x. Vi får $(xy)' = xy' + y = x^3$. Därför $xy(x) = \frac{x^4}{4} + C$ eller $y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$. Begynnelsevillkoret ger $2 + C/2 = 4$ alltså $C = 4$. Vi får $y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{4}{x}$.

8. Lös differentialekvationen $y''(x) + 4y(x) = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (3p)
Lösn. Rötterna till den karaktäristiska ekvationen ges av $r_1 = 2i$ och $r_2 = -2i$. Vi får $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Begynnelsedata ger $y(x) = \cos(2x)$.

9. Studera ekvationen $y'(x) = y(x)^2$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Vad blir Framåt Euler approximationen av $y(0.2)$ givet att intervallet $[0, 0.2]$ delas in i 2 lika stora delintervall? (3p)
Lösn. Vi får $y_1 = y_0 + 0.1 \cdot y_0^2 = 1.1$ och $y_2 = y_1 + 0.1 \cdot y_1^2 = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1^2 = 1.221$.

10. Låt $f(t)$ vara en given funktion sådan att $f(0) = 3$ och $f'(0) = 7$. Låt Laplace transformen av $f(t)$ betecknas med $F(s)$. Uttryck Laplace transformen av $f''(t)$ i termer av $F(s)$. (3p)
Lösn. Laplace transformen ges av $s^2F(s) - 3s - 7$.

---

11. Bevisa att $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ och $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (5p)
Lösn. Se Sats 5.1 i Adams och Essex.

12. Studera begynnelsevärdesproblemet $y''(t) - 4y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Skriv som ett system av första ordningen ODE på matrisform. Utför ett steg av Bakåt Euler metoden med steglängd 0.1. (5p)

Lösn. Med $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ får vi,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bakåt Euler ger,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

Lösning av ekvationssystemet ger $y_1^{(1)} = \frac{25}{24}$ $y_2^{(2)} = \frac{5}{12}$.

13. Skriv en Matlab rutin som approximerar integralen mellan $x = 0$ och $x = 1$ av funktionen $x \sin(x)$ med mittpunktsmetoden. Låt antal intervall vara $n = 10$. (5p)

Lösn.

```
S = 0; n=10; h=1/n; x=0.5*h;
while x < 1
  S = S + h*x.*sin(x);
  x = x + h;
end
```

14. Låt enhetscirkeln i origo rotera kring linjen $y = 5 - 5x$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (5p)

Lösn. Vi använder Pappus sats. Centroiden är i origo. Vinkelräta avståndet till linjen är $\bar{r} = \frac{5}{\sqrt{26}}$, alltså är problemet ekvivalent med att rotera en cirel med radie 1 och centrum i $(-\bar{r}, 0)$ runt y-axeln. Arean är π. Alltså ger Pappus volymen $V_P = \pi * 2 * \pi * \bar{r}$. Eftersom $\bar{r} < 1$ måste vi räkna bort den del av den roterande cirkeln som räknas dubbelt. Vi kallar den V_0. Den del som måste tas bort ges av att funktionen $(x + \bar{r})^2 + y^2 = 1$ roteras kring y-axeln.

$$V_0 = \int_0^{1-\bar{r}} 2\pi y(x) x \, dx.$$

Den totala volymen ges av $V = V_P - V_0$. För full poäng räcker att V_P beräknas.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Ivar Simonsson tel. 031–7725325

TMV151
2017–08–14 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		