

TMV151

Matematisk analys i en variabel

Föreläsare: Axel Målgvist

* Praktisk information
Google TMV151

- 3 föreläsningar /vecka
- 3 övningar /vecka
- 1 dugga i Lr 4
- 1 tenta

* Kurslitteratur

- Adams Essex, Extra material

* Ideg: Summor och area som gränsvärde av summor. Kapitel 5.1 och 5.2* Summor och Σ notation

Definition Låt $m, n \in \mathbb{Z}$ sådan att $m \leq n$ och f vara en funktion definierad för heltalen $m, m+1, \dots, n$. Då gäller

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

Ex: $\sum_{i=-2}^3 i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 19$

En vanlig notation är

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n, \text{ där tex } a_i = f(i)$$

Oändlig summa skrivs

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Givet konstanter A, B och funktioner f och g definierade för heltalen m, \dots, n

$$\text{gäller } \sum_{i=m}^n (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i)$$

$$\text{Vidare gäller } \sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{i=0}^n f(i+m)$$

Eftersom $VL = f(m) + f(m+1) + \dots + f(m+n)$ och

$$HL = f(0+m) + f(1+m) + \dots + f(n+m) = VL$$

$$\text{Ex: } \sum_{i=3}^8 (i-2)^2 = \{j=i-2\} = \sum_{j=1}^6 j^2$$

* Beräkning av Summor

Sats 5.1

$$a) \sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$$b) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$c) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$d) \sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

Bervis

a) är trivial

b) följer av denna kalkyl (trick)

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot n(n+1) \end{array}$$

c) Här krävs mer avancerat trick

Vi har att $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

Vi summerar nu detta uttryck med

$k = 1, 2, \dots, n$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

⋮

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$+ (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n$$

teleskopoperande

$$= 3 \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{3}{2} n(n+1) + n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n}{3} = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n}{3} = \\ &= \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3} = \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{n}{6} \cdot (2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

d) Låt $S = \sum_{i=1}^n r^{i-1}$, vi har

$$(r-1)S = rS - S = (r + r^2 + r^3 + \dots + r^n)$$

$$- (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}) = r^n - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{om } r \neq 1$$

Ex Beräkna $\sum_{k=m+1}^n (2k^2 - k) =$

$$= \sum_{k=1}^n 2k^2 - k - \sum_{k=1}^m 2k^2 - k =$$

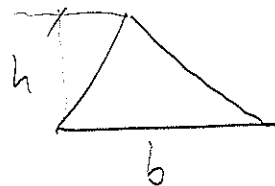
$$= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} - \frac{2m^3}{3} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$$

* Area som gränsvärde av summor

Arean av en rektangel och triangel ges av

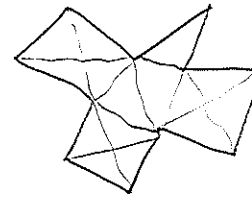


$$A = h \cdot b$$



$$A = \frac{h \cdot b}{2}$$

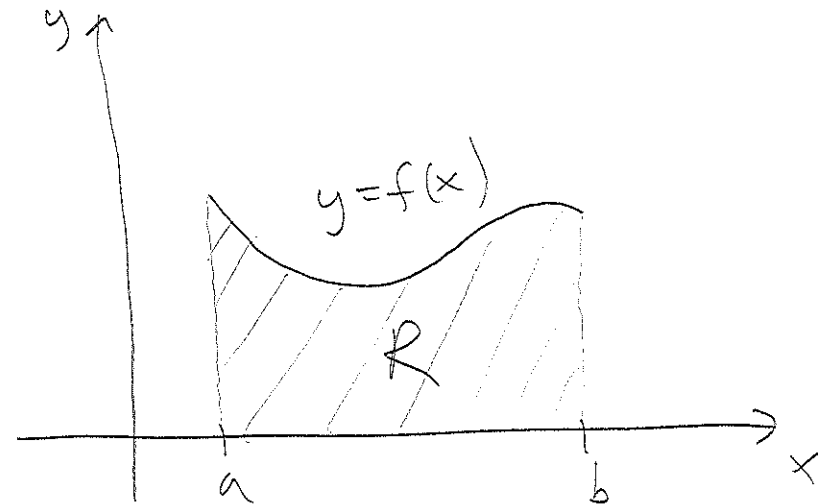
Varje polygon (ett område som begränsas av linje segment)



kan delas in i icke överlappande trianglar.

Därmed kan vi beräkna arean av en godtycklig polygon.

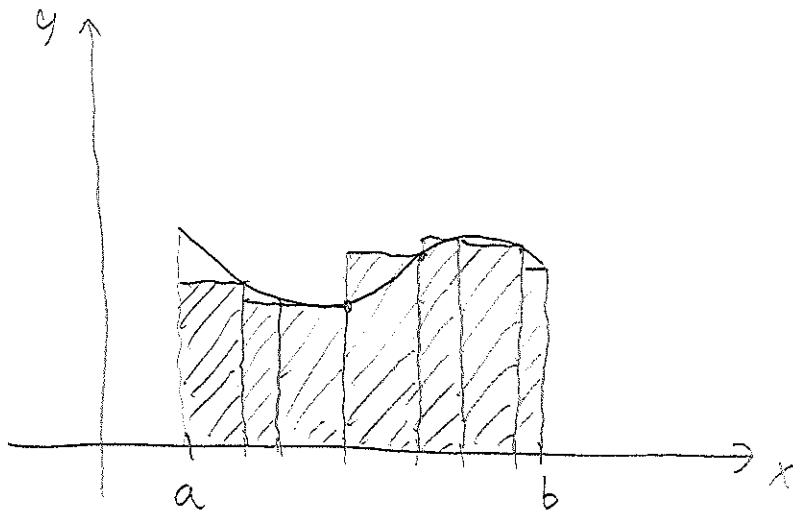
- Arean av ett område R mellan en given positiv funktion $f(x)$ och x -axeln



Vi delar intervallet $[a, b]$ i n delintervall $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Vi låter $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ vara längden av delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

Vi skapar nu rektanglar med bredd Δx_i och höjd $f(x_i)$



Arean av rektanglarna är

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

Vi noterar att om f är avtagande $f(x) < f(y)$ för $x > y$ så kommer

$$S_n < \text{Arean av } R$$

På samma sätt om f är växande $f(x) > f(y)$, $x > y$: $S_n > \text{Arean av } R$

Genom att göra en finare indelning minskar felet mellan S_n och arean av R .

Låter vi det största delintervallets längd

$$\max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{gäller}$$

$$\text{Arean av } R = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} S_n$$

Ofta letar man delintervallen
ha samma längd:

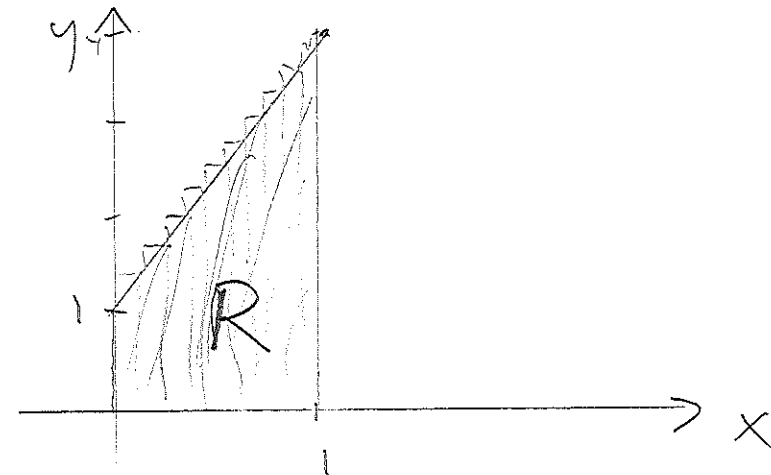
$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

- Några area beräkningar

Ex: Låt $f(x) = 3x+1$ och beräkna
arean mellan $f(x)$ och x -axeln
mellan $x=0$ och $x=1$.

Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i=0, \dots, n$

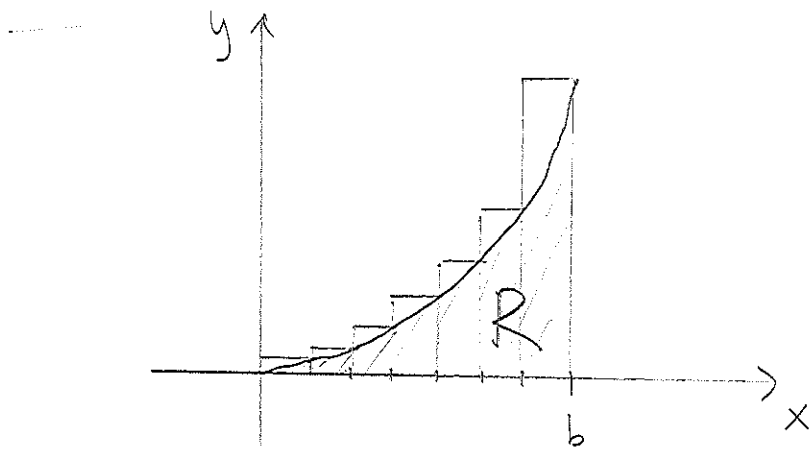
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, \quad i=1, \dots, n$$



$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (3\frac{i}{n} + 1) = \\ &= \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^n i + 1 = \frac{3 \frac{n(n+1)}{2}}{n^2} + 1 = \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Area under } R = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{2}$$

Ex: Låt $f(x) = x^2$. Beräkna arean mellan $x=0$, $x=b$, x -axeln och $f(x)$.



Låt $x_i = b \cdot \frac{i}{n}$ och

$$S_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \frac{b^2}{n^2} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

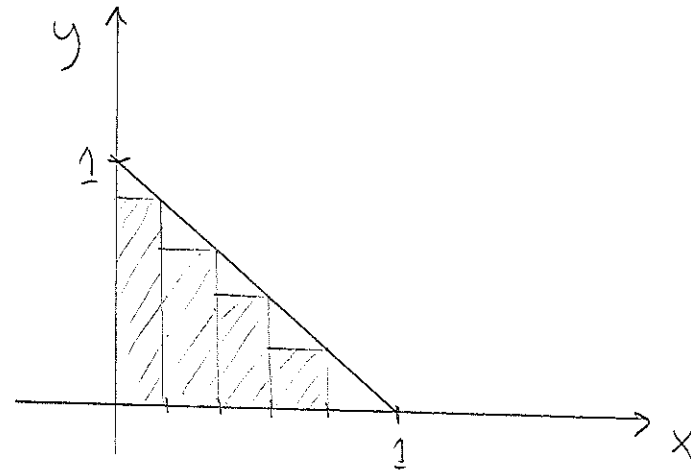
$$= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} \Rightarrow$$

$$\text{Arean av } R = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^3}{3}$$

Ex: Identifiera gränsen $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n^2}$ som en area och beräkna den.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}. \text{ Vi identifierar}$$

$$\frac{1}{n} = \Delta x_i, \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad f(x_i) = 1 - x_i$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i}{n^2}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i =$$

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$