* <u>Idag</u>:
- Riemann summor
- Integralen
- Integralens egenskaper
- Analysens fundamentalsats

Kapitel 5.3 - 5.5

* Riemann summor:

Låt $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ vara en mängd tal sådana att

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

P kallas en partition av $[a,b]$ i n delintervall, $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\ldots,n$

Talet n beror på partitionen, $n = n(P)$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$. Vi kallar det största talet Δx_i partitionen P:s norm

$$\|P\| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

Vi låter f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$

På varje delintervall låter vi $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ vara den punkt där f antar sitt minimum

$$f(x) \geq f(l_i) \quad , x \in [x_{i-1}, x_i]$$

På samma sätt är $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ punkten där f antar maximum $f(x) \leq f(u_i)$

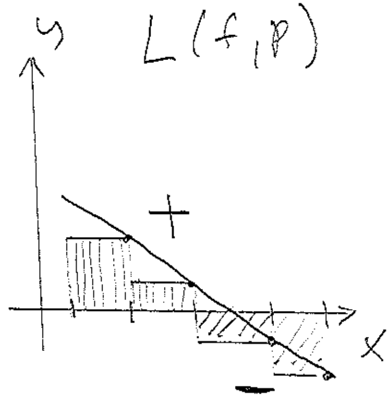
$$x \in [x_{i-1}, x_i]$$

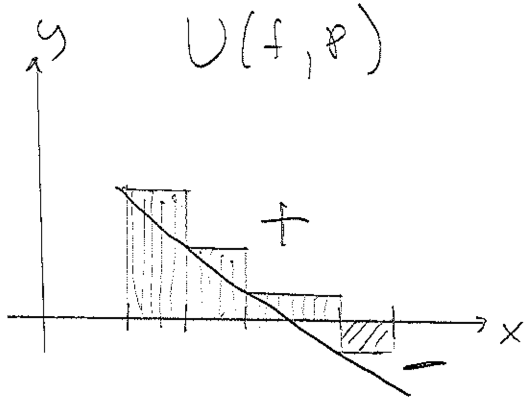
<u>Definition</u>

Givet en kontinuerlig funktion f och en partition P av $[a,b]$ låt

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$ vara undre Riemann summan

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$ vara övre Riemann summan





* Integralen

<u>Definition</u>

Om det finns exakt ett tal I så att vi för varje partition P av $[a,b]$ har $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$ då är f integrerbar på $[a,b]$ och vi kallar I integralen av f på $[a,b]$.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

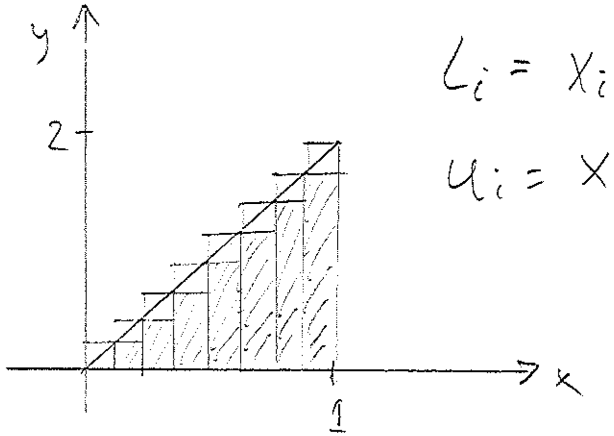
← differentialen av x

integrand

gränser

Ex: Visa att $f(x) = 2x$ är integrerbar på $[0,1]$.

Låt $P_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ där $x_i = \frac{i}{n}$.



$l_i = x_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$

$u_i = x_i$, $i=1,\ldots,n$

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2x_{i-1} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2x_i = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow I = 1 \Rightarrow \int_0^1 2x\,dx = 1.$$

Sats 5.2

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$.

Bevis ingår ej i kursen.

* Integralens egenskaper

Sats 5.3 Låt f, g vara integrerbara

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

d) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

e) Om $a \le b$, $f(x) \le g(x)$, $a \le x \le b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

f) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

g) Integralen av en udda funktion över ett symmetriskt intervall runt 0 är 0,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{om } f(x) = -f(-x)$$

h) Om f är jämn, $f(-x) = -f(x)$ gäller

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Bevis: Resultaten är väntade. Bevisen ingår dock inte i kursen då vissa är tekniska på grund av definitionen av integralen.

Sats 5.4 Medelvärdessatsen för integraler

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$.
Då finns en punkt $c \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

Bevis

Eftersom f är kontinuerlig antar f ett minsta värde m och ett största värde M i $[a,b]$. Låt $f(l) = m$, $f(u) = M$, $l, u \in [a,b]$

För tvåpunktspartitionen $P = \{a, b\}$ gäller $m(b-a) = L(f,P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,P) = M(b-a)$

I termer av f har vi alltså

$$f(l) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(u)$$

Eftersom f är kontinuerlig antar f alla mellanliggande värden i $[f(l), f(u)]$. Därför finns $c \in [a,b]$ så att

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

och därmed ett $c \in [a,b]$ så att

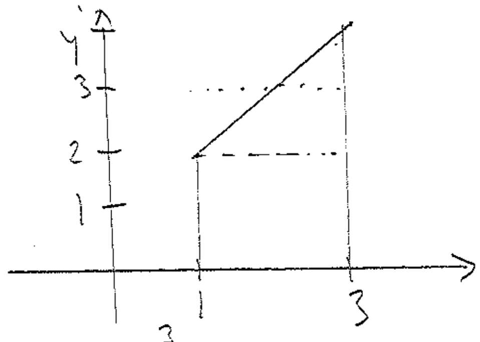
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \quad \blacksquare$$

Definition Medelvärde av funktion

Låt f vara integrerbar på $[a,b]$. Vi definierar medelvärdet av f på $[a,b]$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ex: Låt $f(x) = x+1$ på $[1,3]$



$$\bar{f} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (x+1)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$$

Sats 5.5 Analysens fundamentalsats

Låt f vara kontinuerlig på ett intervall I innehållande punkten a.

(i) Låt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Då är F deriverbar på I, och $F'(x) = f(x)$.

F är då primitiv till f på I

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

(ii) Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på I, $G'(x)=f(x)$ så gäller för varje $b\in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$$

Bevis

Vi använder derivatans definition

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_c^{x} f(t)\,dt\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,h\cdot \underset{[x,\,x+h]}{f(c)}$$

$$=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

eftersom f är kontinuerlig

Om $G'(x)=f(x)$ måste $F(x)=G(x)+C$

eftersom $(F(x)-G(x))'=0 \Rightarrow F(x)-G(x)=C$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)=G(x)+C$$

Med $x=a$ får vi $0=G(a)+C \Rightarrow C=-G(a)$

Låt $x=b$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = G(b)+C = G(b)-G(a)$ ■

Definition Evalueringssymbolen

Låt $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

$\Rightarrow$ t ex $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

Räkneregler för derivata av integral

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}F(g(x)) = \{\text{kedjeregeln}\}$$

$$F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^{g(x)} f(t)\,dt +$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{0} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - \frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} f(t)\,dt$$

$$= f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$