* Idag: * Substitutionsmetoden

* Area beräkning med integralen

* Integral beräkning med Matlab

Kapitel 5.6 - 5.7

* Substitutionsmetoden

Beräkning av integraler är endast om vi känner till primitiv funktionen för integranden.

Vi kommer studera tekniker för att hitta primitiv funktionen.

Kom ihåg: I många fall går det inte uttrycka primitiv funktion i kända elementära funktioner (även om integranden är uttryckt i elementära funktioner tex e^{x^2})

Då används istället numeriska metoder för att beräkna integraler.

Primitiv funktioner att komma ihåg

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad , r \neq -1 \; (r \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad a>0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int b^{ax} dx = \frac{1}{a\ln b} b^{ax} + C$$

Kom ihåg $\arcsin \underset{[-1,1]}{x} = \underset{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{\alpha} \iff \sin\alpha = x$

$\arcsin x = \sin^{-1} x$

Substitutions metoden

Kedjeregeln ger $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

I integral form

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

Notera att med $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$

eller på differentialform $du = g'(x)dx$

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \int f'(u)du = f(g(x)) + C$$

Ex: $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2u} du$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \ln\left((x^2+1)^{1/2}\right) + C$$

$$\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} v = 1+e^x \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} = \int v^{1/2} dv = \frac{2}{3} v^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$$

Sats 5.6 Substitution i en bestämd integral

Låt g vara deriverbar i $[a,b]$ med $g(a)=A$ och $g(b)=B$ och att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

Bevis Låt F vara primitiv funktion till f; $F'(u)=f(u)$. Då gäller

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(B) - F(A) = \int_A^B f(u)\,du$$

Ex: $I = \int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=\sqrt{x+1} & u(8)=3 \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} & , u(0)=1 \end{matrix} \right\}$

$$= 2\int_1^3 \cos u\,du = 2\sin 3 - 2\sin 1$$

Trigonometriska integraler

Kom ihåg

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad | \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx =$$

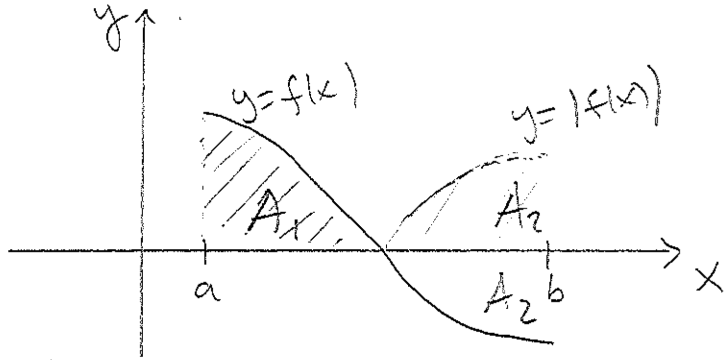
$$= \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int 1-\cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$$

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=\sin x \\ du = \cos dx \end{matrix} \right\} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

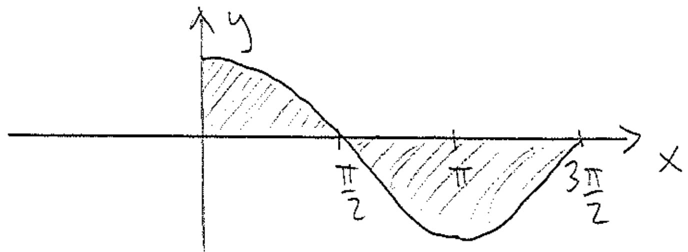
* Area beräkning m.h.j.a. integralen



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

Ex: Beräkna arean mellan $y = \cos x$, x-axeln och $x=0$ och $x = \frac{3\pi}{2}$

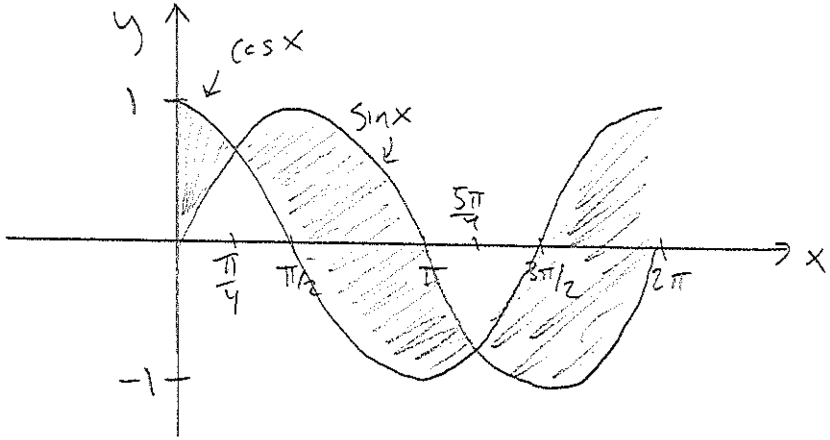


$$A = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x\,dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 1 - (-1-1) = 3$$

Ex: Beräkna arean mellan kurvorna

$y = \sin x$ och $y = \cos x$, $x=0$ till $x=2\pi$



$$A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x - \cos x\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos x - \sin x\,dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$+ (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}.$$

* Integralberäkning med hjälp av Riemannsummor i Matlab

Kom ihåg vår första konstruktion för beräkning av areor/integraler

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; i = 1, \ldots, n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i$$

Vi noterar att evalueringen kan göras i godtycklig punkt i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ och fortfarande ge en approximation till integralen

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

För en kontinuerlig funktion f gäller

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

Denna approximation är lätt att beräkna i Matlab, givet ett val av $\{c_i\}_{i=1}^{n}$

Alt 1 Beräkning av S_n

```
function value = riemann(f, I, n)      % I = [a b]

value = 0
x = linspace(I(1), I(2), n+1);

for i = 1:n          ← Loop över intervall

    incr = f(x(i+1)) * (x(i+1) - x(i));
    value = value + incr;

end
```

högra punkten alt x(i) vänster

Alt 2 utan for loop

```
function
x = linspace(I(1), I(2), n+1);
dx = (I(2) - I(1)) / n;
c = x(2:n+1);
value = sum(f(c)) * dx.
```

* Sammanfattning av kapitel 5

Viktiga Satser:

- Sats 5.1 Summa formler
- Sats 5.4 Integralkalkylens medelvärdessats
- Sats 5.5 Analysens huvudsats
- Sats 5.6 Variabelsubstitution

Övriga viktiga punkter:

- Integralens egenskaper
- Primitiva funktioner till elementära funktioner
- Använda substitution för att beräkna integraler
- Riemann summor och hur de implementeras i Matlab.