Idag: * Numerisk lösning av integraler

* Felanalys

Kapitel 6.6–6.7

* Numerisk lösning av integraler

Vi studerar $I = \int_a^b f(x)\,dx$

– I många fall är primitiv-funktionen till f svår eller omöjlig att uttrycka i elementära funktioner.

Då krävs numeriska approximationer, numerisk integration eller kvadratur:

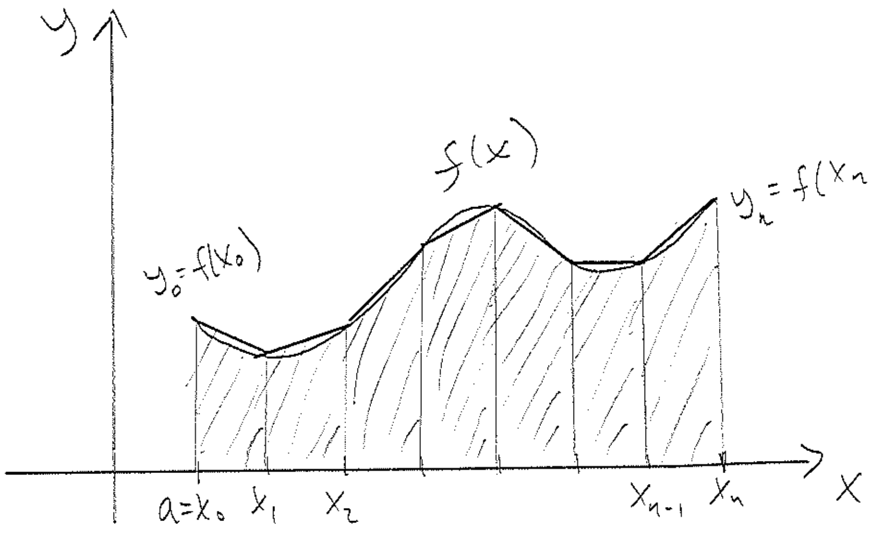
De tekniker vi studerar kräver att $f(x)$ evalueras (beräknas) i ett antal (n) jämnt fördelade punkter i $[a,b]$.

Vi delar $[a,b]$ i n delintervall

$x_i = a + ih$, där $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

– Trapetsregeln



Vi konstruerar en rät linje mellan (x_{i-1}, y_{i-1}) och (x_i, y_i) och beräknar arean av trapetsen,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h\frac{y_{i-1}+y_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Definition

Trapetsregeln för att approximera $\int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervall av samma längd är

$$T_n = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right)$$

Ex: Låt $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, beräkna T_4, T_8

$n = 4 \Rightarrow h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$, $\quad 1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4} \quad 2$

$$T_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0{,}69702381\dots$$

$n = 8 \Rightarrow h = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$

$$T_8 = \frac{1}{8}\left(\dots\right) = 0{,}69412185\dots$$

$$T_{16} = 0{,}69339120\dots$$

$$I = \ln 2 = 0{,}69314718\dots$$

Felet minskar!

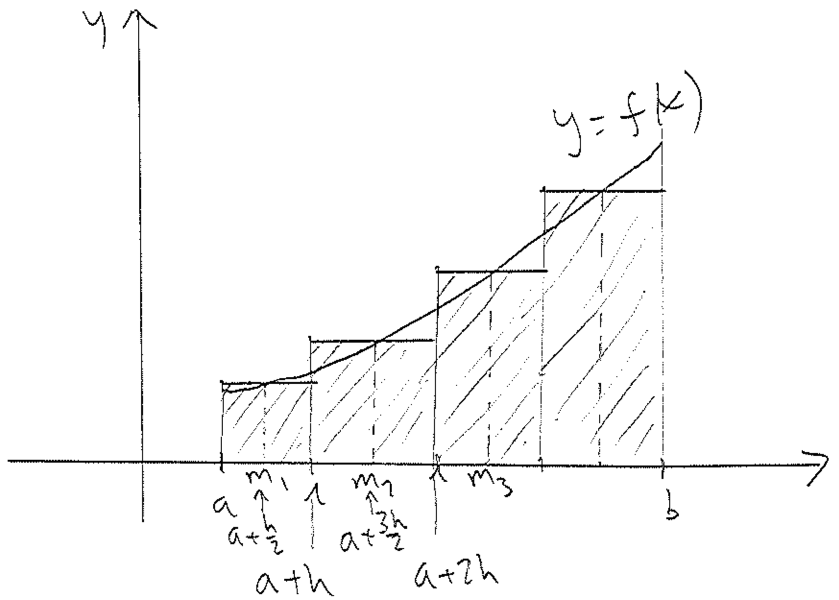
* Mittpunktsregeln

Definition

Mittpunktsregeln för att approximera $\int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervall av samma längd är

$$M_n = h\left(f(m_1)+f(m_2)+\dots+f(m_n)\right) = h\sum_{i=1}^{n} f(m_i)$$

där $h = \frac{b-a}{n}$, $m_j = a+(j-\frac{1}{2})h$, $j=1,\dots,n$



Ex: Låt $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. Beräkna M_4

$$M_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9/8}+\frac{1}{11/8}+\frac{1}{13/8}+\frac{1}{15/8}\right) = 0{,}69266055\dots$$

Kom ihåg: $I = 0{,}69314718\dots$

Sats 6.4

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig och har första och andra derivata som är kontinuerliga. Antag vidare $|f''(x)| \le K$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \le \frac{K(b-a)}{24}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

där $h = \frac{b-a}{n}$.

Notera att felet $\sim \frac{1}{n^2}$.

Bevis: Mittpunkt. För Trapets, se boken

Vi studerar ett delintervall $[x_{i-1}, x_i]$.

Taylors formel ger: $|f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x-m_i)| \leq \frac{K}{2}(x-m_i)^2$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(m_i)h\right| =$$

$$= \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i)\,dx\right| = \left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} A(x-m_i)\,dx = 0\right\}$$

$$= \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x-m_i)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x-m_i)|\,dx \leq$$

$$\leq \frac{K}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-m_i)^2\,dx = \{y = x - m_i\} =$$

$$= \frac{K}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\,dy = \frac{K}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-h/2}^{h/2} = \frac{K}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h^3}{8} =$$

$$= \frac{Kh^3}{24}$$

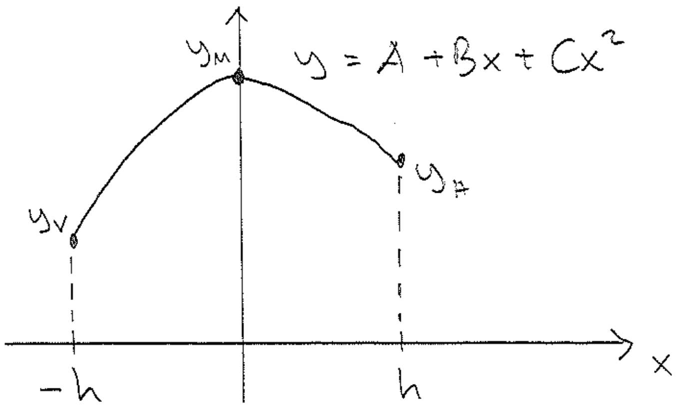
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(m_i)h\right| \leq n \cdot \frac{Kh^3}{24} = \frac{(b-a)Kh^2}{24} = \frac{K(b-a)^3}{24n^2} \quad \blacksquare$$

* Simpson's formel

Mittpunktsregeln approximerar med styckvisa konstanter, trapetsmetoden med styckvisa linjära funktioner.

Simpson's regel använder kvadratiska polynom.

Vi studerar arean under en kvadratisk funktion.



$$\left.\begin{aligned} y_V &= A - Bh + Ch^2 \\ y_M &= A \\ y_H &= A + Bh + Ch^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = y_M \,,\; 2Ch^2 = y_V - 2y_M + y_H$$

$$\int_{-h}^{h} (A + Bx + Cx^2)\,dx = 2h y_M + C\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= 2h y_M + \frac{1}{3} 2Ch^3 = 2h y_M + \frac{h}{3}(y_V - 2y_M + y_H)$$

$$= \frac{h}{3}(y_V + 4y_M + y_H)$$

Givet en funktion f uträknad i $n+1$ punkter $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$

där $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0, 1, \dots, n$

Kan vi använda 2:a grads approximationen på delintervallen parvis

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \,, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Summerar vi dessa $\frac{n}{2}$ delar får vi <u>Simpsons formel</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

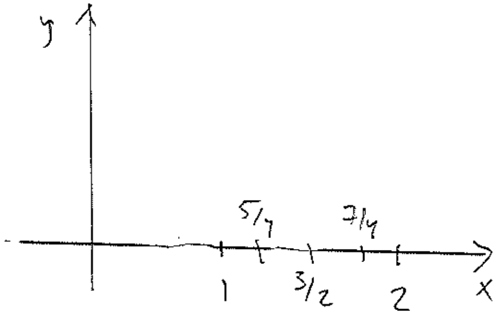
$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Ex: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. Beräkna S_4

Kom ihåg: $I = \ln 2 = 0{,}69314718\ldots$

$$S_4 = \frac{1/4}{3}\left(1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}69325397$$



Notera att Simpson's formel använder samma punkter som trapets + mittpunkt.

Man kan visa att

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3}$$

Sats 6.5

Om f har fyra kontinuerliga derivator på $[a,b]$ och $|f^{(4)}(x)| \le K$

Så gäller $$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4},$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Bevis: Ingår ej i kursen.

Notera att felet i Simpson's metod är proportionellt mot $\frac{1}{n^4}$.

Trapets och Mittpunkt har $\frac{1}{n^2}$.

Ex 2: Beräkna en övre begränsning av felet $\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_4 \right|$

För att få rätt konstant behöver vi beräkna $f^{(4)}$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow \max_{1 \le x \le 2} |f^{(4)}(x)| \le 24$

$K = 24$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_4 \right| \le \frac{24 \cdot 1^5}{180 \cdot 4^4} \approx 0{,}00052083$$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - S_8 \right| \le 0{,}00003255$$

⋮

* Sammanfattning av kapitel 6

Viktiga satser:

- Sats 6.2 p-integraler
- Sats 6.4 Mittpunkt, trapets
- Sats 6.5 Simpson's felbegränsning

Övriga viktiga punkter

- Partiell integration
- Substitution för att beräkna integraler
- Numerisk lösning av integraler