<u>Idag</u>:

* Båglängder
* Ytareor
* Masscentrum

Kapitel 7.3-7.4

* Båglängder

Låt A och B vara två punkter i planet. Vi låter $|AB|$ beteckna avståndet mellan A och B, alltså längden av linjesegmentet mellan A och B.

Vi vill nu definiera längden av en kurva C som sammanbinder A och B

Axel Målqvist axel@chalmers.se

Vi introducerar $n+1$ punkter på kurvan C, $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$

Vi sammanbinder punkterna med linjesegment och betecknar längden

$$L_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \ldots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Definition

Båglängden av kurvan C från A till B är det minsta reella tal $s \in \mathbb{R}$ sådant att L_n för alla linje-approximationer till C uppfyller

$$L_n \leq S.$$

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |P_{i-1}P_i| \to 0}} L_n$$

Vi studerar kurvor av ändlig längd.

Låt f vara en funktion definierad på intervallet $[a,b]$ med kontinuerlig derivata f' på $[a,b]$.

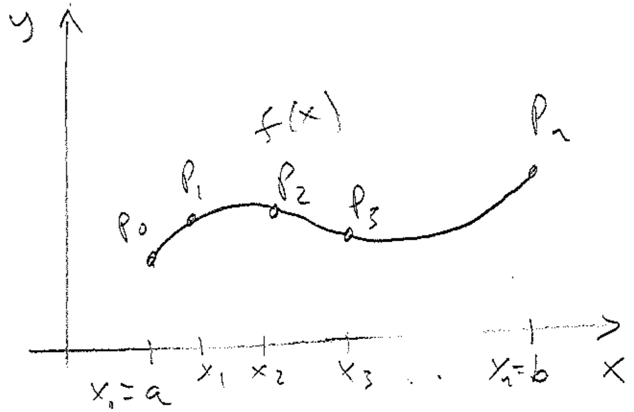
Låt C vara grafen $y = f(x)$

alltså $C = \{(x, f(x)),\ x \in [a,b]\}$

Vi delar in $[a,b]$ i n delintervall

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Låt $P_i = (x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$



$$L_n = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x_i,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Medelvärdessatsen ger att det finns tal c_i i $[x_{i-1}, x_i]$ sådana att

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) \Rightarrow$$

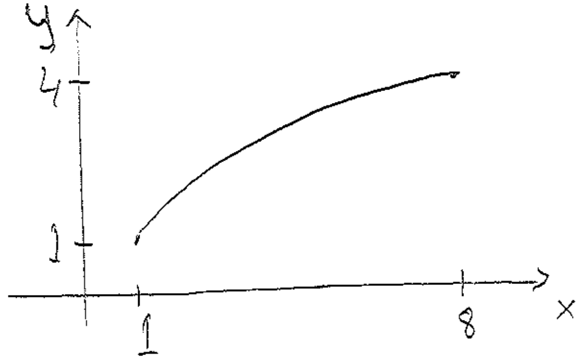
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

Därmed är L_n Riemannsumma för $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, då $n \to \infty$, $\max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$

Båglängden s av kurvan $y = f(x)$, mellan $x = a$ och $x = b$ ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Ex: Låt $f(x) = x^{2/3}$, $x = 1$ till $x = 8$



$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ är kontinuerlig mellan $x = 1$ och $x = 8$

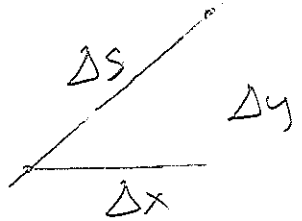
$$s = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}}\, dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 9x^{2/3} + 4 \\ du = 6x^{-1/3}\, dx \\ u(8) = 9 \cdot 4 + 4,\ u(1) = 13 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{13}^{40} u^{1/2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 6}\, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} \left(u^{3/2} \right) \Big|_{13}^{40} =$$

$$= \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27}$$

* Area av rotationsytor

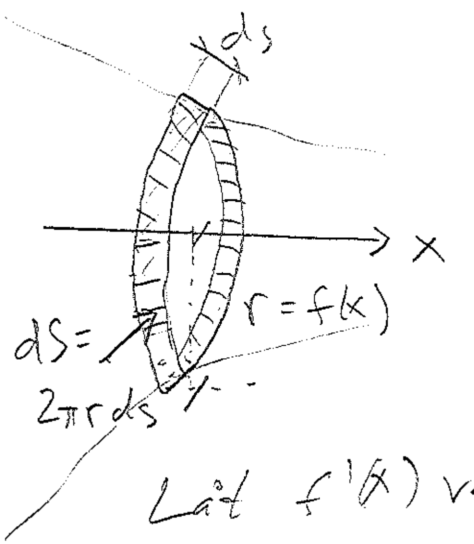


$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (f'(x))^2$$

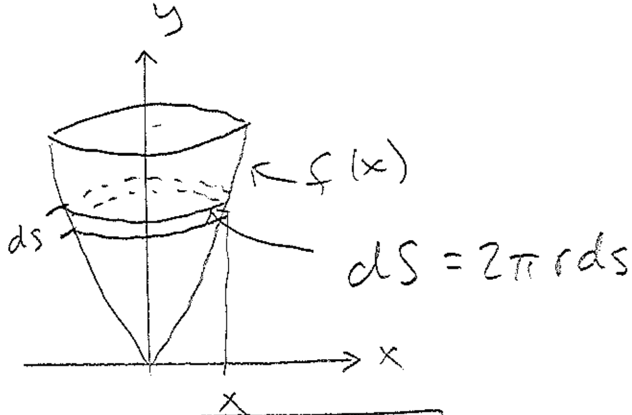
$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



Låt $f'(x)$ vara kontinuerlig på $[a,b]$ och $y = f(x)$ rotera runt x-axeln. Arean av den genererade ytan är då

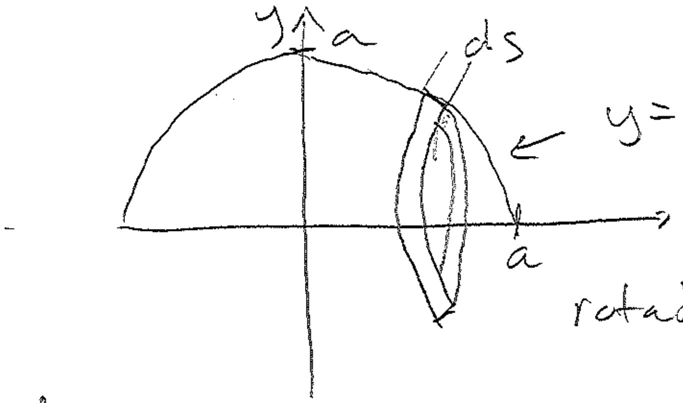
$$S = 2\pi \int_a^b \underbrace{|f(x)|}_{r} \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}_{ds}$$

Rotation runt y-axeln ges av



$$S = 2\pi \int_a^b \underbrace{|x|}_{r} \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}_{ds}$$

Ex: Ytan av en sfär med radie a



$y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$-a \leq x \leq a$

rotation runt x-axeln

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} \underset{\uparrow\, f(x)}{y} \sqrt{1 + \Big(\underset{\uparrow\, f'(x)}{\frac{x}{y}}\Big)^2}\, dx =$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + x^2}\, dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2}\, dx$$

$$= 4\pi a^2$$

* Masscentrum

Låt $\rho(P)$ vara densiteten i punkten P. Massan Δm av ett litet volymselement innehållande P ges av $\Delta m \approx \rho(P)\Delta V$. I gräns har vi

$$dm = \rho(P)\, dV.$$

$$m = \int dm = \int \rho(P)\, dV$$

Ex: Vi studerar en cylinder av höjd H och bas med area A. Vi låter densiteten vara $\rho = \rho_0(1+h)$ där h är höjd. Beräkna massan

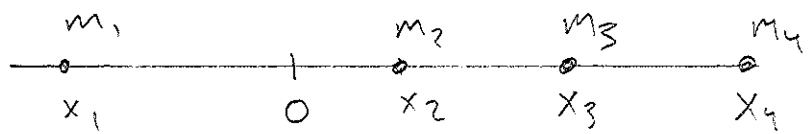
$$m = \int_0^H \rho_0 A (1+h)\, dh = \rho_0 A\left(H + \frac{H^2}{2}\right).$$

– Moment

Momentet kring en punkt $x = x_0$ är en massa m placerad i punkten x ges av $m(x-x_0)$. Givet flera massor $m_1, m_2, \dots, m_n$ i punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ ges momentet kring $x=x_0$ av

$$M_{x=x_0} = (x_1-x_0)m_1 + (x_2-x_0)m_2 + \dots + (x_n-x_0)m_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0)m_j$$



Masscentrum är den punkt $\bar{x}$ kring vilken momentet är 0.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j-\bar{x})m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{x} m_j$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

I två dimensioner gäller för n punktmassor i $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n)$

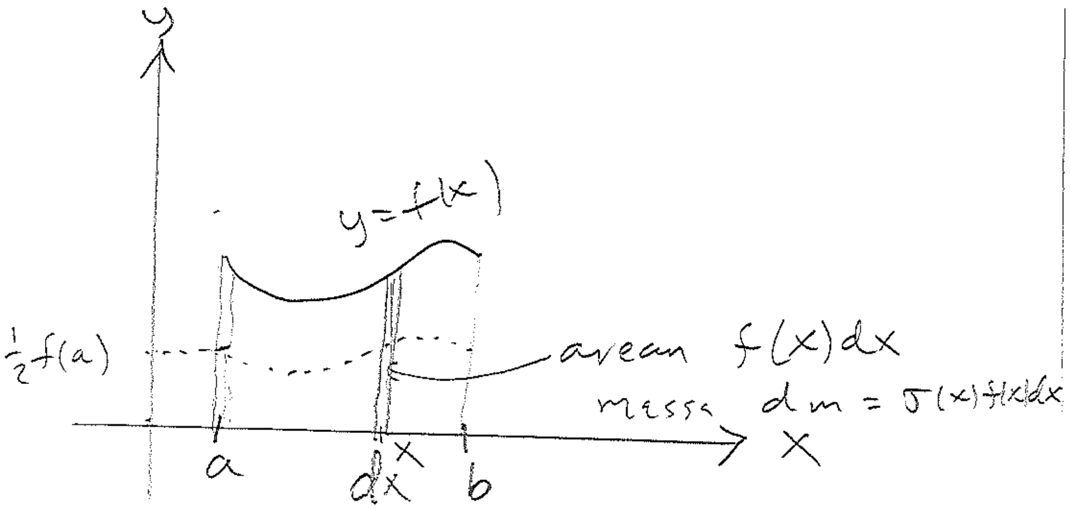
$$M_{x=0} = x_1 m_1 + \dots + x_n m_n = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j$$

$$M_{y=0} = y_1 m_1 + \dots + y_n m_n = \sum_{j=1}^{n} y_j m_j$$

och

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

– Finn masscentrum av ett område begränsat av $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ med densitet $\sigma(x)$.



Massan av elementet

$$dm = \sigma(x) f(x) dx$$

Momentet runt $x=0$

$$dM_{x=0} = x\sigma(x) f(x) dx$$

$$m = \int_a^b \sigma(x) f(x) dx$$

$$M_{x=0} = \int_a^b x\sigma(x) f(x) dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

Eftersom σ ej beror av y är masscentrum i varje segment dm $\bar{y}_{dm} = \frac{1}{2} f(x)$

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm} \cdot dm = \frac{1}{2}\sigma(x) f(x)^2 dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f(x)^2 dx, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$$