Idag:

* Centroider
* Tillämpningar av integralen
* Introduktion till differentialekvationer

Kap 7.5-7.6, 7.9

* Centroider

Om materian är utspridd jämnt i ett område så att densiteten ρ är konstant beror bara masscentrum på objektets form. Denna punkt kallas objektets centroid.

Låt $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ utgöra ett område i $\mathbb{R}^2$ då är centroiden $(\bar{x}, \bar{y})$

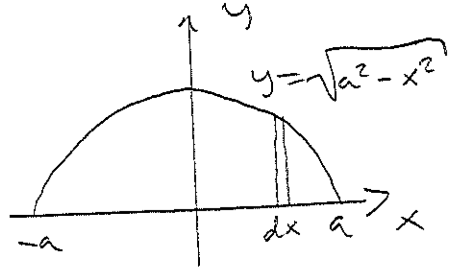
$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A}$$ och

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \quad M_{x=0} = \int_a^b x f(x)\,dx$$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Ex: Låt $-a \le x \le a$, $0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$

Beräkna centroiden.



$A = \frac{1}{2}\pi a^2$, en halv cirkel

$$M_{x=0} = \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 0 \quad \text{ej konstigt!}$$

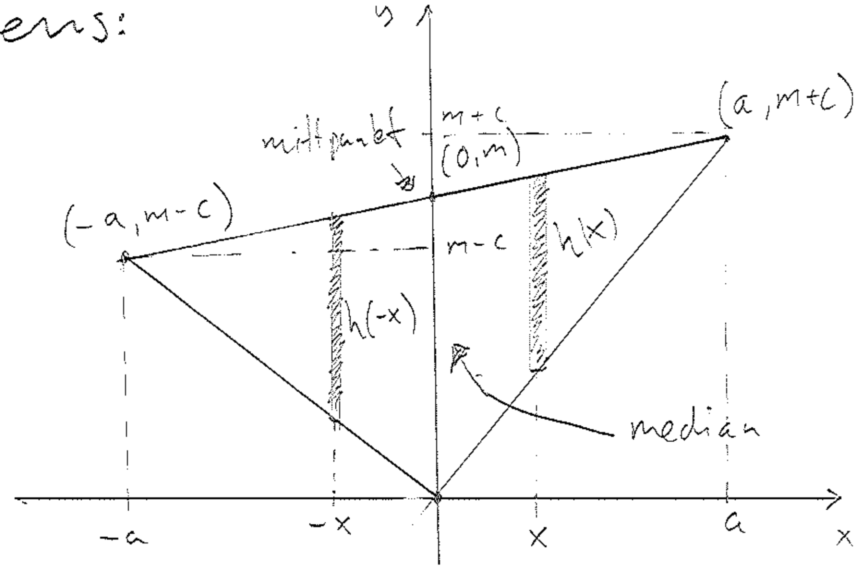
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} a^2-x^2\,dx = \frac{1}{2}2a^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{4a}{3\pi}$

Sats 7.1 Centroiden av en triangel.

Centroiden av en triangel är punkten där medianerna skär varandra.

Bevis:



Vi noterar att $h(-x) = h(x)$.

(Notera att $h(x) = m\frac{a+x}{a}$, $x<0$, $h(x) = m\frac{a-x}{a}$, $x>0$)

Därmed är $dM_{x=0} = -x\,h(-x) + x\,h(x) = 0$

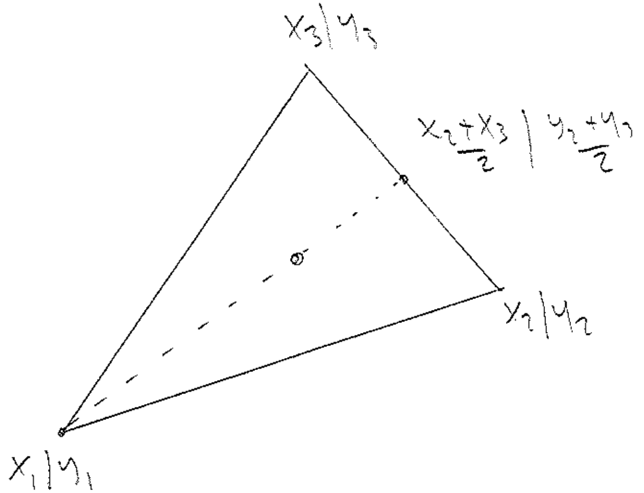
Momentet runt $x=0$ är alltså

$M_{x=0} = \int_{-a}^{x=a} dM_{x=0} = 0$, alltså centroiden ligger på medianen.

Samma argument ger att centroiden ligger på alla tre medianer vilket innebär att den ligger i punkten som skärs av de tre medianerna.

Låt (x_1, y_1), (x_2, y_2) och (x_3, y_3) vara hörnkoordinaterna i en triangel då är centroidens koordinater

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



Låt $0 \le s \le 1$ vara en parameter.

Punkterna på medianen kan skrivas som

$$\left(s x_1 + (1-s)\frac{x_2+x_3}{2}, \; y_1 + (1-s)\frac{y_2+y_3}{2}\right), \quad 0 \le s \le 1$$

Låt $s = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Samma argument kan användas på alla tre medianer visar att $(\bar{x}, \bar{y})$ ligger på alla medianer.

Sats 7.2 Pappus's sats

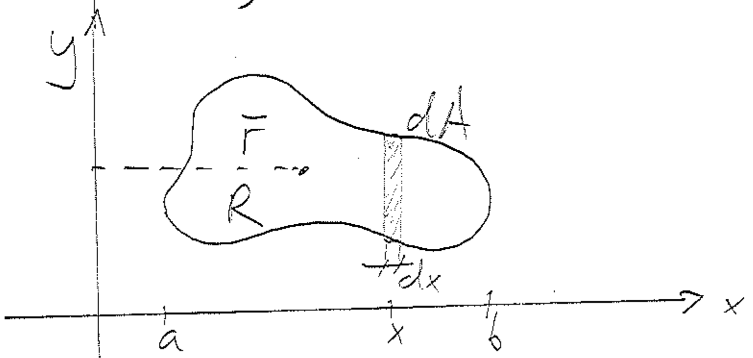
(a) Om ett område i planet R roteras runt en linje L så är volymen hos den genererade kroppen arean av R gånger längden som centroiden färdats

$$V = 2\pi \bar{r} \cdot A,$$

$\bar{r}$ är vinkelräta avståndet mellan centroiden av R och L.

b) Om en kurva C i planet på ena sidan av en linje L roterar runt linjen och genererar en rotationsyta så är arean av ytan $S = 2\pi\bar{r}\cdot s$, där s är längden på C och $\bar{r}$ är vinkelräta avståndet mellan centroiden och linjen L.

Bevis av a)

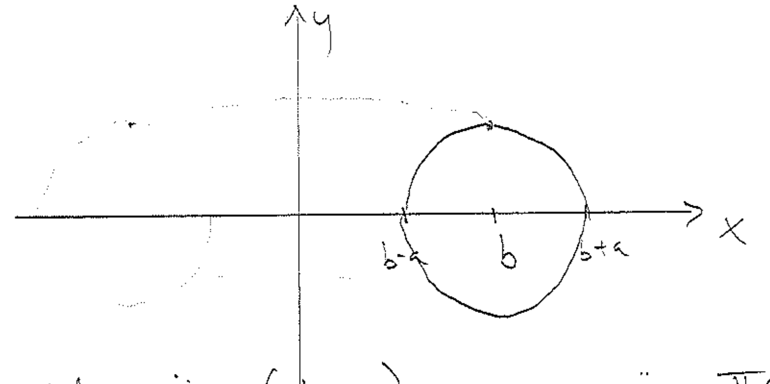


Vi väljer koordinatsystemet så att L är y-axeln och låt R befinna sig mellan $x=a$ och $x=b$.

Då gäller att $\bar{r}=\bar{x}$, x-koordinaten av centroiden av R.

Volymen $V = 2\pi\int_{x=a}^{x=b} x\,dA = 2\pi M_{x=0} = 2\pi\bar{x}A = 2\pi\bar{r}A$ ∎

Ex: Använd Pappus's sats för att beräkna volymen av en torus (doughnut) given av den roterande disken $(x-b)^2+y^2\le a^2$ runt y-axeln, $0<a<b$



Centroiden är $(b,0)$, arean är πa^2

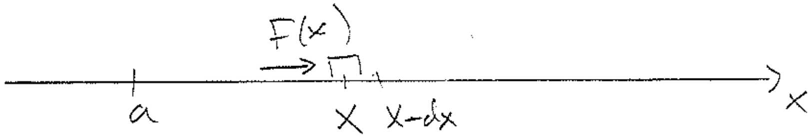
$\Rightarrow V = 2\pi\cdot b\cdot\pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$.

* Integralens tillämpningar

Arbete = kraft × väg

Givet en kraft i x-axelns riktning som flyttar ett objekt från $x=a$ till $x=b$

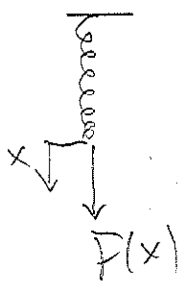
Låt kraften variera med x, $F = F(x)$



Arbetet för att flytta objektet från x till $x+dx$ är $dW = F(x)\,dx \Rightarrow$

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW = \int_a^b F(x)\,dx$$

Ex: Hook's Lag



Kraften som krävs för att dra fjädern är

$F(x) = k \cdot x$ ← fjäderkonstant

Om 2000N krävs för att dra ut fjädern 4cm, hur mycket arbete har utförts?

$$F(4) = k \cdot 4 = 2000 \Rightarrow k = \frac{2000}{4} = 500\ \text{N/cm}$$

$$W = \int_0^4 k \cdot x\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 500 \cdot \frac{4^2}{2} = 4000\ \text{Ncm}$$

$$= 40\ \text{Nm} = 40\ \text{J}.$$

* Första ordningens differentialekvation

Modell för populationen av djur med begränsad föda.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right),$$

$y(t)$ är populationen

t är tid

k är en konstant som beskriver reproduktionen

L är det antal individer som kan leva av den föda som finns.

Detta är en differentialekvation av första ordningen eftersom första derivatan ingår. Vidare är den separabel eftersom

$$\frac{L\,dy}{y(L-y)} = k\,dt$$

Vi integrerar på båda sidor

$$\int \frac{L\,dy}{y(L-y)} = \int k\,dt = k\cdot t + C$$

Vi har $\frac{L}{y(L-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{L-y} \Rightarrow$

$L = (L-y)A + yB \Rightarrow$ $0 = -A + B \Rightarrow B = A$
$L = LA \Rightarrow A = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{L\,dy}{y(L-y)} = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\,dy = k\cdot t + C$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln(L-y) = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C$$

$$\frac{y}{L-y} = e^{kt+C} = C_1 e^{kt} \Rightarrow y = (L-y)C_1 e^{kt}$$

$$y = \frac{C_1 L e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}, \quad C_1 = e^C$$

I allmänhet har vi

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Ex: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = C$$

* Sammanfattning av kapitel 7.

- Sats 7.1 triangelns centroid
- Sats 7.2 a) Pappus sats

Viktiga moment.

- Volym av rotationskroppar
- Båglängder, ytareor
- masscentrum
- centroider
- Separabla differential-ekvationer