

- Idag:
- * Klassificering av differentialekvationer
 - * Lös första ordningens differentialekvationer
 - * Existens och endegyldighet av lösning
 - * Numerisk approximation

Kapitel 18.1 - 18.3

* Klassificering av differentialekvationer

En differentialekvation (DE) är en ekvation som innehåller en eller flera derivator av en okänd funktion.

Ex: Newtons andra lag

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

En ordinär DE är en DE som bara har derivator med avseende på en variabel, tex Newtons andra lag.

En partiell DE är en DE som har derivator med avseende på flera variabler.

Ex: En dimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u(x,t) \text{ är förskjutning i en vibrerande sträng.}$$

En DE har ordning n om den högsta ordningens derivata som förekommer i ekvationen är n .

Ex: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$
 ordning 2

$\frac{d^3 y}{dx^3} + y^4 = \sin x$, ordning 3

En linjär ODE kan skrivas på

formen
 $a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$

En linjär ODE är homogen om $f(x)=0$, annars inhomogen.

Sats 18.1

Om y_1 och y_2 är lösningar till samma linjära homogena ODE

$$(*) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

så är även varje linjär kombination

$$y = Ay_1(x) + By_2(x) \text{ lösning.}$$

Beris: Sätt in $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ i $(*)$
 $a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = A(a_n(x)y_1^{(n)} + \dots + a_0(x)y_1) + B(a_n(x)y_2^{(n)} + \dots + a_0(x)y_2) = 0$

Sats 18.2

Om y_1 löser $(*)$ och y_2 löser $(**)$
 $(**) \quad a_n(x)y_2^{(n)} + \dots + a_0(x)y_2 = f(x)$ så löser även $y = y_1 + y_2$ $(***)$.

Beris: Vi sätter in $y_1 + y_2$ i (**)

$$\begin{aligned} a_n(x)(y_1 + y_2)^{(n)} + \dots + a_0(x)(y_1 + y_2) &= \\ &= \underbrace{a_n(x)y_1^{(n)} + \dots + a_0(x)y_1}_{0} + \underbrace{a_n(x)y_2^{(n)} + \dots + a_0(x)y_2}_f \\ &= f(x) \quad \square \end{aligned}$$

* Lös första ordningens DE

Linjära:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Om $q(x) = 0 \Rightarrow$ separabel $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x) dx$

I allmänhet används integrerande faktor. Låt $P(x) = \int p(x) dx$ vara primitiv till $p(x)$.

Vi noterar att

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e^{P(x)} y) &= p(x)e^{P(x)} y + e^{P(x)} y' = \\ &= e^{P(x)} q(x) \end{aligned}$$

$$e^{P(x)} y = \int e^{P(x)} q(x) dx \text{ eller}$$

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$$

Ex: $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$

$$p(x) = x \Rightarrow P(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\frac{x^2}{2}} y) &= x e^{\frac{x^2}{2}} y + e^{\frac{x^2}{2}} y' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}} \\ e^{\frac{x^2}{2}} y(x) &= \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell integration} \\ u = x^2 \quad v = e^{\frac{x^2}{2}} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int u \cdot \frac{dv}{dx} dx = u \cdot v - \int \frac{du}{dx} \cdot v dx = \\ &= x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 - 2 + C e^{-x^2/2}$$

- DE på formen $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Låt $v = \frac{y}{x}$ eller $y = xv(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \text{vi får}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{f(v) - v}{x}$$

Som är separabel $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$

Ex: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x \cdot y}{xy + y^2}$

Låt $y = v \cdot x \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{dividera med} \\ x^2 \text{ uppe och nere} \end{array} \right\} = \frac{1+v}{v+v^2} = \frac{1}{v}$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \Rightarrow \int \frac{v}{1-v^2} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{v}{1-v^2} dv = \left\{ \begin{array}{l} u=1-v^2 \\ du=-2v dv \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$\ln|x|^2 = \ln(|u|^{-1}) + C \quad |x|^2 = \frac{C}{|u|}$$

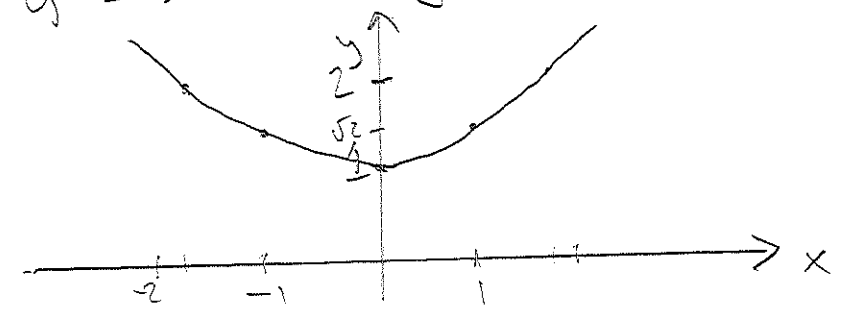
$$\Rightarrow |1-v^2| = \frac{C}{x^2} \text{ eller } \left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \frac{C}{x^2}$$

$$\Rightarrow |x^2 - y^2| = C \text{ eller } x^2 - y^2 = C'$$

- Givet ytterligare information, t.ex

$$y(0) = 1 \Rightarrow 0^2 - 1^2 = C' \Rightarrow C' = -1$$

$$y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 1}$$



* Existens och entydighet

Vi studerar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sats 18.3 Existens och entydighet

Antag $f(x, y)$ och $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ är kontinuerliga på en rektangel av formen $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ innehållande punkten (x_0, y_0) . Då finns ett $\delta > 0$ så att det i intervallet $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ finns en unik entydig lösning $y(x)$.

$$\underline{\text{Ex}}: \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Har lösning $y_1(x) = \frac{1}{1-x}$ eftersom $y' = \frac{1}{(1-x)^2} = y^2$ och $y(0) = 1$. Trots att $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga existerar bara lösningen för $x < 1$.

$$\underline{\text{Ex}} \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Har två lösningar $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 0$. Vi har dock att $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y^{-1/3}$ och är ej kontinuerlig i $y = 0$.

* Numeriska metoder

Vi studerar nu approximativa lösningar

$$\text{föU } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Vi skapar en sekvens av punkter

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots \text{ där}$$

h kallas steglängd.

En numerisk (enstegs) metod ger

en formel för $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ givet

$$y_n,$$

- Eulers metod

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

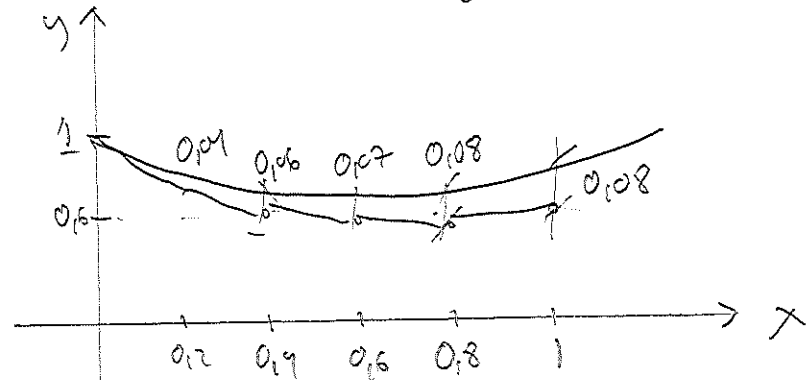
$$\underline{\text{Ex:}} \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Beräkna en approximativ lösning i $[0,1]$ med steglängd $h=0,2$.

$$x_n = \frac{n}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 5$$

$$y_{n+1} = y_n + 0,2(x_n - y_n) = 0,8y_n + 0,04n$$

Den exakta lösningen ges av $y = x - 1 + 2e^{-x}$



$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0,8, \quad y_2 = 0,68, \quad y_3 = 0,624, \quad y_4 = 0,6192 \\ y_5 = 0,65536$$