Idag: * Andra ordningens differential ekvation

* Fallet med konstanta koefficienter

Kapitel 18.4, 3.7

* Differential ekvation av 2:a ordningen

En ODE (ordinär differential ekvation) av andra ordningen har formen

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

för någon funktion F av fyra variabler.

Lösningen av ekvationen kräver två integreringar ⇒ 2 obestämda konstanter.

– Ekvationer som kan reduceras till första ordningens ODE

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0 \quad \text{(ej beroende på } y\text{)}$$

Låt $v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$

Givet lösningen till denna 1:a ordn. ODE för vi $y = \int v(x)\,dx$

Ex: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

Låt $v = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = xv^2$

Denna ODE är separabel 1:a ordn.

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow v = -\frac{2}{x^2 + C_1}$$

$$-2 = y'(0) = v(0) = -\frac{2}{C_1} \Rightarrow C_1 = 1$$

begynnelsevillkor

$$y(x) = -2\int \frac{dx}{1+x^2} = -2\arctan x + C_2$$

$1 = y(0) = -2\arctan 0 + C_2 = 0 + C_2 \Rightarrow$

begynnelsevillkor

$C_2 = 1$

$\therefore$ $y(x) = 1 - 2\arctan x$

$F\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}, y\right) = 0$ (ej beror av x)

Kan också reduceras till 1:a ordningen.

Låt $v = \dfrac{dy}{dx}$.

Notera att $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = v\cdot\dfrac{dv}{dy}$

av kedjeregeln eftersom $v = v(y)$

$F\left(v\dfrac{dv}{dy}, v, y\right) = 0$ som är av 1:a ordningen. Sedan har vi att lösa

$\dfrac{dy}{dx} = v(y)$ för $y(x)$.

Ex: Lös $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Låt $v = \frac{dy}{dx} \Rightarrow yv\frac{dv}{dy} = v^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln|y| + C$$

$$\Rightarrow v = Cy, \quad \frac{dy}{dx} = Cy \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int C\,dx = Cx + D$$

$$\ln|y| = Cx + D \Rightarrow y = \pm e^{Cx+D} = C'e^{Cx}$$

$\ast$ Linjära 2:a ordningens ODE

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

Om $f(x) = 0$ kallas ekvationen homogen.

Med $f(x) = 0$, $a_2 \neq 0$, a_i kontinuerliga gäller att $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ har lösningar på formen

$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ där

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$ för alla x

$\Longleftrightarrow C_1 = C_2 = 0$, y_1 & y_2 är oberoende.

Givet en lösning y_1 till en homogen 2:a ordningens ekvation ges en annan oberoende lösning av att substituera $y = v(x)y_1$ i ekvationen och beräkna $v(x)$.

Ex: Visa att $y_1 = e^{-2x}$ löser $y'' + 4y' + 4y = 0$ och ~~ta~~ fram den allmänna lösningen.

$$y_1' = -2e^{-2x}, \quad y_1'' = 4e^{-2x} \Rightarrow$$

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x}(4 - 8 + 4) = 0$$

Låt $y = e^{-2x}v(x) \Rightarrow y' = -2e^{-2x}v + e^{-2x}v'$

$$y'' = 4e^{-2x}v - 2e^{-2x}v' - 2e^{-2x}v' + e^{-2x}v''$$

$$= e^{-2x}(4v - 4v' + v'')$$

Vi sätter in detta i ekvationen

$$0 = y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(\cancel{4v} - \cancel{4v'} + v'' - 8v + \cancel{4v'} + 4v)$$

$$= e^{-2x}v'' \Rightarrow v(x) = C_1 + C_2 x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, \quad \underbrace{y_2 = xe^{-2x}}_{\text{oberoende av } y_1}$$

Den allmänna lösningen till en 2:a ordningens linjär ODE kan skrivas som summan av den allmänna lösningen till den homogena ekvationen plus en lösning till den inhomogena

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partikulärlösning}}}{y_p} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogen lösning}}}{y_h}$$

∗ 2:a ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter

Vi studerar $ay'' + by' + cy = 0$, där $a \neq 0$, $y = y(t)$.

Vi ansätter en lösning på formen

$$y(t) = e^{r \cdot t} \Rightarrow$$

$$(ar^2 + br + c)e^{r \cdot t} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Lösningen till andragradsekvationen är

$$r = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vi studerar tre fall

(i) $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$r_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ är den allmänna lösningen.

(ii) $b^2 = 4ac \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = r$

En lösning ges då av e^{rt}. Den andra får vi genom $y = e^{rt}u(t)$

$$y' = re^{rt}u + e^{rt}u'$$

$$y'' = r^2e^{rt}u + re^{rt}u' + re^{rt}u' + e^{rt}u''$$
$$= e^{rt}(r^2u + 2ru' + u'')$$

$\Rightarrow$ insatt i ekvationen $\Rightarrow$

$$0 = ay'' + by' + cy = e^{rt}(ar^2u + 2aru' + au''$$
$$+ bru + bu' + cu) =$$
$$= e^{rt}(au'' + (2ar+b)u' + (ar^2+br+c)u)$$

Vi har $ar^2+br+c = 0$ och $2ar = -b$

$\Rightarrow 0 = e^{rt}au'' \Rightarrow u = A + Bt$

$\Rightarrow y = Ae^{rt} + Bte^{rt}$

(iii) $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ca}}{2c} = k \pm i\omega,$

$k = -\frac{b}{2a}$, $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

$\tilde{y}_1 = e^{(k+i\omega)t}$ och $\tilde{y}_2 = e^{(k-i\omega)t}$.

De är oberoende men komplexvärda.

För att få reella lösningar låter vi

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\tilde{y}_1(t) + \frac{1}{2}\tilde{y}_2(t) = e^{k}\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = e^{kt}\cos\omega t$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2i}\left(\tilde{y}_1(t) - \frac{1}{2}\tilde{y}_2(t)\right) = e^{kt}\sin\omega t$$

$$y = Ae^{kt}\cos\omega t + Be^{kt}\sin\omega t$$

Ex: Lös $y'' + y' - 2y = 0$

Vi har ~~att~~ den karaktäristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow$
$(r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, \; r_2 = 1$

$$y = Ae^{-2t} + Be^{t}.$$

Ex: Lös $y'' + 6y' + 9y = 0$

Vi har $(r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -3$

$$y = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}.$$