Idag:

* Differentialekvationer med konstanta koefficienter
* Icke homogena differentialekvationer

Kapitel 18,5 - 18,6

* linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Vi har studerat andra ordningens linjära ODE med konstanta koefficienter

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Genom att ansätta $y = e^{rt}$ får vi den karaktäristiska ekvationen

$ar^2 + br + c = 0$ med lösningar r_1, r_2

Vi kan göra samma sak för n:te ordningen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

med karaktäristisk ekvation

$$(*)\; a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

Lösningen kan skrivas som en linjärkombination av n linjärt oberoende partikulärlösningar

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t)$$

Lösningarna ges av

1. Om r_1 är reell rot till (*) med multiplicitet k, alltså att $(r-r_1)^k$ är en faktor av (*) är $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, t^2 e^{r_1 t}, \dots, t^{k-1} e^{r_1 t}$ k oberoende lösningar.

2) Om $r = a+ib$ och $r = a-ib$ är komplex konjugerade rötter till (*) med multiplicitet k, alltså $(r-a-ib)^k (r-a+ib)^k = ((r-a)^2+b^2)^k$ är en faktor av (*) är $e^{at}\cos bt, te^{at}\cos bt, \dots, t^{k-1}e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt, te^{at}\sin bt, \dots, t^{k-1}e^{at}\sin bt$, $2k$ oberoende lösningar.

Ex: $y^{(4)} - 16y = 0$

Karakteristiska ekvationen är

$$0 = r^4 - 16 = (r^2+4)(r^2-4) = (r+2i)(r-2i)(r+2)(r-2)$$

har rötter $r = 2, -2, 2i, -2i$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t$$

Man kan testa om lösningen uppfyller ekvationen!

* Euler ekvationen

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

Vi antar $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a \neq 0$.

Vi låter $x > 0$ och ansätter $y = x^r$

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$$

$\Rightarrow$ Euler's ekvation ger att

$$(ar(r-1) + br + c)x^r = 0$$

Givet $x > 0$ måste nu

$$(ar(r-1) + br + c) = 0 \quad \text{eller}$$

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Lösningarna ges av

$$r_1 = \frac{a-b + \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{a-b}{2a} - \frac{\sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi har nu tre fall,

$$(b-a)^2 - 4ac \begin{cases} > 0 & (i) \\ = 0 & (ii) \\ < 0 & (iii) \end{cases}$$

(i) $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

(ii) Då är $r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$. Vi låter $y = x^r v(x) \Rightarrow$ kan visa att

$$y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x$$

(iii) $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = \frac{a-b}{2a}$

$$\beta = \frac{\sqrt{4ac - (b-a)^2}}{2a}$$

$$x^{\alpha \pm i\beta} = e^{\ln\left(x^{\alpha \pm i\beta}\right)} = e^{(\alpha \pm i\beta)\ln x} =$$

$$= e^{\alpha \ln x}\left[\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)\right] =$$

$$= x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \pm i x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

Detta ger två oberoende lösningar

$$y = C_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + C_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

Vi söker reella lösningar och om y löser ekvationen så gör även $\bar{y}$ det.

Ex $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$

$y(1) = 5$, $y'(1) = 0$

Låt $y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$$\left(2r(r-1) - r - 2\right)x^r = 0 \Rightarrow$$

$$2r^2 - 3r - 2 = 0 \Rightarrow (2r+1)(r-2) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = 2$$

$$y(x) = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^2$$

$$y'(x) = -\tfrac{1}{2} C_1 x^{-3/2} + 2C_2 x$$

$$y'(1) = -\tfrac{1}{2}C_1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 4C_2$$

$$y(1) = C_1 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 1, C_1 = 4$$

$$y(x) = 4\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \cdot x^2, \quad x > 0.$$

* Inhomogena ekvationer

$$(*) \quad a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

Vi har att lösningen kan skrivas som den generella lösningen till den homogena ekvationen ($f(x)=0$) "homogen lösningen" plus en lösning "partikulär lösning" till (*).

<u>Ex:</u> $y'' + y' - 2y = 4x$

Bestäm en partikulär lösning

Vi ansätter ett linjärt polynom

$y_p = Ax + B \Rightarrow y' = A, \; y'' = 0$

$A - 2Ax - 2B = 4x \Rightarrow A = -2, \; B = -1$

$y_p(x) = -2x - 1$

Bestäm homogen lösningen

Karaktäristiska ekvationen är

$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, \; r_2 = -2$

$\Rightarrow y(x) = -2x - 1 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Sammanfattning kap 18

Sats 18,1 homogen + homogen = homo

18,2 homogen + partikulär = part

* Homogen och partikulär lösningar

* 1:a, 2:a ordningens ODE

* Konstanta koefficienter